Lösningar Tenta LGMA40
24/8 2016 Elin Götmark

(1.) Vi skriver om diff.ekv. på standardform genom att dela med x: $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2\sqrt{x+1}}$.

Sedan räknar vi ut integrerande faktor, eftersom det är en linjär diff. ekv. av första ordningen: $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x|$.

Vi ska alltså multiplicera ekv. med $e^{2\ln|x|} = e^{\ln(x^2)} = x^2$. Då får vi $x^2y' + 2xy = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, eller $(x^2y)' = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Integrering ger:

$$x^2y = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\sqrt{x+1} + C,$$ så

$$y = \frac{2\sqrt{x+1} + C}{x^2}$$

(2.) Vi löser först den homogena ekvationen $y'' + 2y' + y = 0$. Den karakteristiska ekv. är $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0$.

Vi har alltså en dubbelrot $r = -1$, så $y_h = e^{-x}(C_1 + C_2x)$. Nu tar vi fram en partikulärlösning: först ansätter vi $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Då är $y_p' = 2Ax + B$ och $y_p'' = 2A$. Insättning i ekv. ger

$$2A + 4Ax + 2B + Ax^2 + Bx + C = x^2 \iff$$
$$Ax^2 + x(4A + B) + 2A + 2B + C = x^2.$$

Så $\begin{cases} A = 1 \\ 4A + B = 0 \\ 2A + 2B + C = 0, \end{cases}$

vilket har lösningen $\underline{\underline{A = 1}},$

$$4 + B = 0 \iff \underline{\underline{B = -4}}$$

$$2 - 8 + C = 0 \iff \underline{\underline{C = 6}}.$$

Så $y_p = x^2 - 4x + 6$, och

$$y = y_h + y_p = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + x^2 - 4x + 6.$$

Nu ska vi bestämma C_1 och C_2 med hjälp av begynnelsevillkoren. $y(0) = 0$ ger

$$C_1 + 6 = 0 \iff \underline{\underline{C_1 = -6}}.$$

$y' = e^{-x}(C_2 - C_1 - C_2 x) + 2x - 4$, så $y'(0) = 0$ ger $C_2 - C_1 - 4 = C_2 - (-6) - 4 = 0 \iff$

$$\underline{\underline{C_2 = -2}}.$$

Alltså är $\underline{\underline{y = -e^{-x}(6 + 2x) + x^2 - 4x + 6}}$

3. Sätt $y(t)$ = glassens temperatur i grader Celsius, som funktion av tiden t i minuter. Då är $y'(t) = k(25 - y(t))$ och

$y(0) = -18^\circ C.$

4. a. Vi använder integralkriteriet. Serien konvergerar omm integralen $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ är konvergent.

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln(x) & x=2 \iff u=\ln(2) \\ du = \frac{1}{x}dx & x\to\infty \iff u\to\infty \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{u}\,du = \Big[\ln|u|\Big]_{\ln(2)}^\infty = \lim_{R\to\infty}\Big[\ln|u|\Big]_{\ln(2)}^R =$$

$$= \underbrace{\lim_{R\to\infty}\ln(R)}_{=\infty} - \ln(\ln(2)).$$

Integralen är alltså divergent, och serien också.

b. $\arctan(k) \to \frac{\pi}{2}$ när $k\to\infty$.

Eftersom termerna inte $\to 0$ är serien divergent enligt sats.

5. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$

$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6) = x^2 + \mathcal{O}(x^4)$

Så $\frac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1+x^2)} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3) - \left(1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)\right) - x}{x^2+\mathcal{O}(x^4)} =$

$$= \frac{x^2+\mathcal{O}(x^3)}{x^2+\mathcal{O}(x^4)} = \frac{1+\mathcal{O}(x)}{1+\mathcal{O}(x^2)} \to 1 \text{ när } x\to 0$$

6. $f(x) = (1-2x)^{1/3}$ $\qquad f(-\frac{1}{2}) = 2^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1-2x)^{-2/3}\cdot(-2) = -\frac{2}{3}(1-2x)^{-2/3}$$

$$f'(-\tfrac{1}{2}) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^{2/3}} = -\frac{2^{1/3}}{3}$$

$$f''(x) = \frac{4}{9}(1-2x)^{-5/3}\cdot(-2) = -\frac{8}{9}(1-2x)^{-5/3}$$

$$f''(-\tfrac{1}{2}) = -\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{2^{5/3}} = -\frac{2^{4/3}}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{5}{3}\cdot\frac{8}{9}(1-2x)^{-8/3}\cdot(-2) = -\frac{80}{27}(1-2x)^{-8/3}$$

Så Taylorpolynomet av grad 2 är

$$p_2(x) = 2^{1/3} - \frac{2^{1/3}}{3}\left(x-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) - \frac{2^{4/3}}{9}\left(x-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 = $$

$$= \underline{2^{1/3}\left(1 - \frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{9}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)}.$$

Resttermen på Lagrangeform är

$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)\left(x+\frac{1}{2}\right)^3}{3!} = \underline{-\frac{80}{27\cdot 27}(1-2\xi)^{-8/3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^3}$$

där ξ ligger mellan x och $-\frac{1}{2}$.

7. Vi skriver om ekvationen som

$x = 4y^2 - 16y + 13$ och ser då att den måste vara en parabel. Vi kvadratkomplett-erar HL:

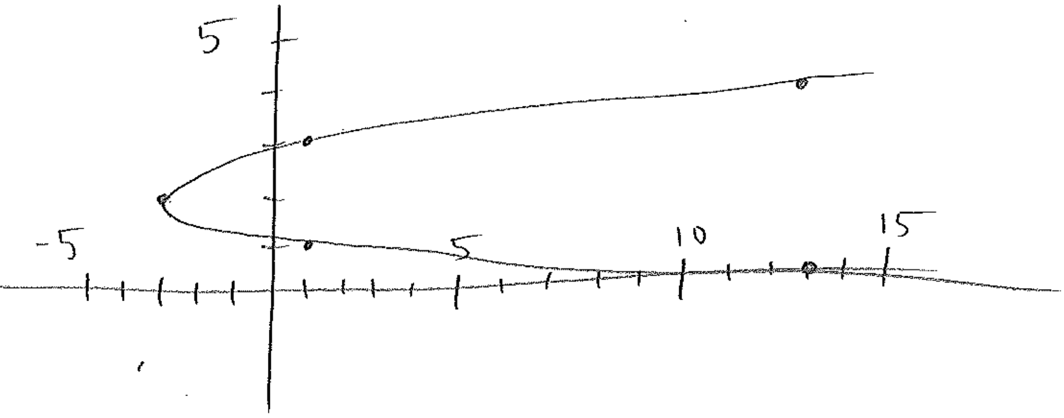
$$4y^2-16y+13 = 4(y^2-4y)+13 =$$
$$= 4((y-2)^2-4)+13 = 4(y-2)^2-16+13 =$$
$$= 4(y-2)^2-3.$$

När $y=2$ är $x=-3$, och för alla andra värden på y är x större.

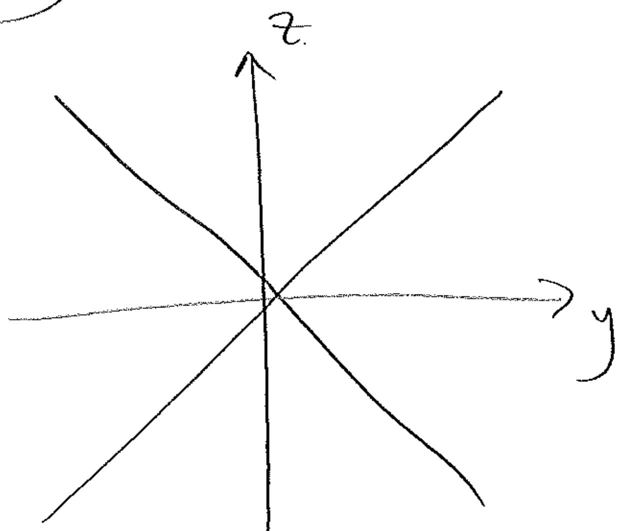
Vi sätter in några andra y-värden:

$y=1$ och $y=3$: $x = 4\cdot 1-3 = 1$

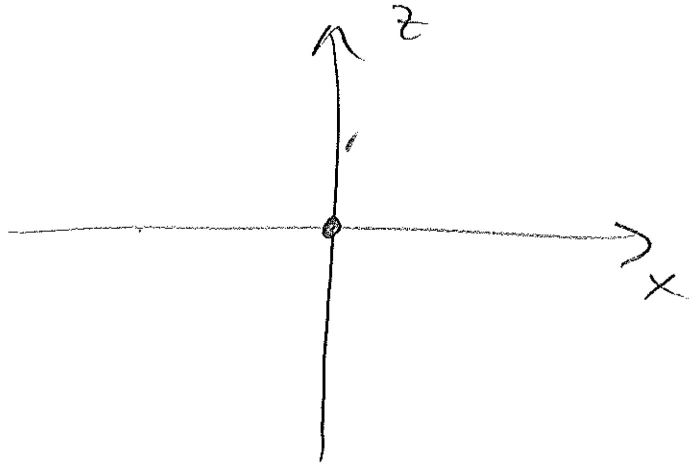
$y=0$ och $y=4$: $x = 4\cdot 4-3 = 13$



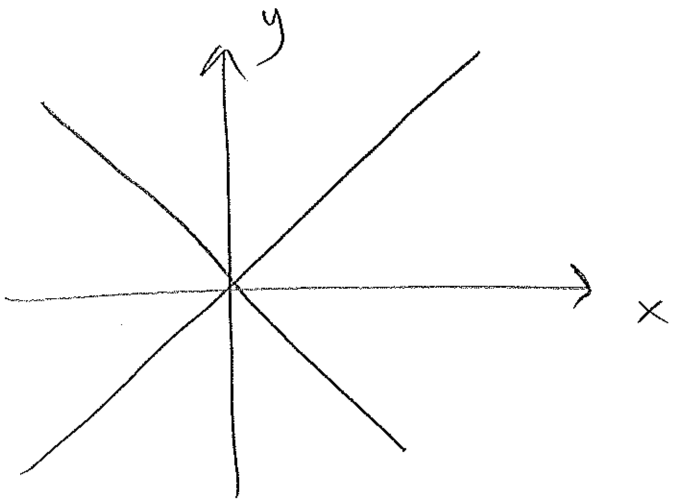
8. $x=0$ ger $z^2=y^2$, dvs $z=\pm y$:



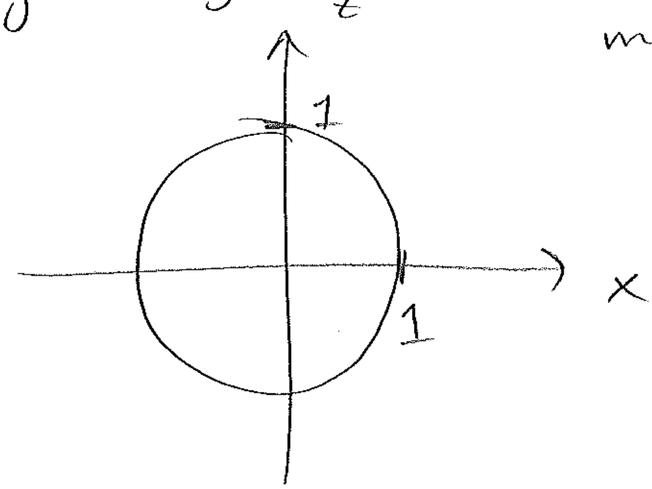
$y=0$ ger $z^2+x^2=0$, dvs $x=z=0$:



$z = 0$ ger $x^2 = y^2$, dvs $x = \pm y$:



$y = 1$ ger $x^2 + z^2 = 1$, dvs en cirkel med radie 1:



Andra värden på $y \neq 0$ ger cirklar med annan radie. Sammantaget ger alla skärningarna att ytan är en kon längs y-axeln: