Lösningar till tentan i LGMA40/L9MA45
13/1 2017, Elin Götmark

1. Vi vill lösa $yy'(1-x^2)=1$, som är separabel: $yy' = \frac{1}{1-x^2} \iff y\,dy = \frac{dx}{1-x^2} \Rightarrow$

$$\int y\,dy = \int \frac{dx}{1-x^2}.$$

För att bestämma HL måste vi partialbråksuppdela $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$.

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1-x)(1+x)} =$$

$$= \frac{(A-B)x+(A+B)}{(1-x)(1+x)}$$

$$\underbrace{(A-B)}_{=0}x + \underbrace{(A+B)}_{=1} = 1 \qquad \begin{cases} A = B \\ A+B=1 \end{cases} \Rightarrow 2A = 1$$

dvs $A = \frac{1}{2}$.

Så vi har: $\int y\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\,dx$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + C$$

$$y^2 = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + 2C$$

$y(0)=1$ ger: $1 = \ln|1| + 2C \Rightarrow 2C = 1$, $C = \frac{1}{2}$

<u>Svar:</u> $y = \sqrt{\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + 1}$

(Välj positiva roten eftersom $y(0)=1$.)

2.) Vi vill lösa $3y'' + y' = e^x + 1$.

$y = y_h + y_p$, och först tar vi fram y_h.

Den karakteristiska ekvationen är $3r^2 + r = 0$

dvs $r^2 + \frac{r}{3} = 0 \iff r(r + \frac{1}{3}) = 0$, så

$r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{1}{3}$. Alltså är $y_h = C_1 e^0 + C_2 e^{-\frac{x}{3}}$

$= \underline{\underline{C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{3}}}}$

Nu tar vi fram y_p.

HL består av två delar, så först löser vi $3y'' + y' = e^x$. HL är inte en homogen lösning, så vi kan sätta $y_{p_1} = Ce^x$.

$y_{p_1}' = y_{p_1}'' = Ce^x$. Sätt in i ekvationen:

$3 \cdot Ce^x + Ce^x = e^x \iff 4Ce^x = e^x$

$\Rightarrow C = \frac{1}{4}$. Så $y_{p_1} = \frac{e^x}{4}$.

Nu löser vi $3y'' + y' = 1$. Vi ser att $y_{p_2}' = 1$, så vi kan välja $y_{p_2} = x$.

Svar: $\underline{y = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{3}} + \frac{e^x}{4} + x}$.

3.) Låt $y(t)$ = mängden glukos i blodet (i gram) vid tiden t (i minuter). Då är

$$y'(t) = 3 - \underbrace{k \cdot y(t)}$$ där $k > 0$.

mängden som tillförs per minut

mängden som förbrukas

4. a. $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 3^{-2k} = \sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot (3^{-2})^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^{k} =$

$= \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{5}{9} \frac{1}{\frac{8}{9}} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$ (dvs konvergent)

b.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ konvergerar omm $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

konvergerar. Vi har $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_1^{\infty} x^{-1/3} dx =$

$= \left[\frac{x^{2/3}}{2/3} \right]_1^{\infty} = \lim_{R \to \infty} \left[\frac{x^{2/3}}{2/3} \right]_1^{R} = \underbrace{\lim_{R \to \infty} \frac{R^{2/3}}{2/3}}_{= \infty} - \frac{1}{2/3}$.

Integralen är divergent,
alltså är serien också det.

5. $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + B_1(x) x^5$

$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + B_2(x) x^5$.

Eftersom $t = \arctan(x)$ är nära noll när x är nära noll, kan vi sätta

$e^{\arctan(x)} = e^{t} = e^{x - \frac{x^3}{3} + B_2(x) x^5} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3} + B_2(x) x^5\right)$

$+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + B_2(x) x^5\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3} + B_2(x) x^5\right)^3 +$

$+ \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{3} + B_2(x) x^5\right)^4 + B_1(x) x^5 =$

$= 1 + x - \frac{x^3}{3} + B_2(x) x^5 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x^4}{3} + B_3(x) x^6 +$

$+ \frac{x^3}{6} + B_4(x) x^5 + \frac{x^4}{24} + B_5(x) x^6 + B_1(x) x^5 =$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24}$

Svar!
$\underline{\underline{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{7x^4}{24}}}$

6. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin(\theta x)x^5}{120}$. Sätt $x = 0,1$.

$$\left|\frac{\sin(\theta x)\,x^5}{120}\right| \leq \frac{x^5}{120} = \frac{0,00001}{120} = \frac{0,000001}{12} < 0,0000001.$$

Så felet kan inte påverka den 5:e decimalen.

$$\sin(0,1) \approx 0,1 - \frac{0,001}{6} = 0,1 - 0,0001666\ldots =$$
$$= 0,0998333\ldots$$

$$\begin{array}{r} 0,000166 \\ 6\,\overline{)\,0,001000} \\ -\quad 6 \\ \hline 40 \\ -\;36 \\ \hline 40 \end{array}$$

osv.

Svar: $0,09983$

7. Detta är en hyperbel på formen

$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eftersom den skär y-axlarna.

Centrum är i $(-2, 3)$. Avståndet från centrum till kurvans övre/nedre vändpunkter är 2, alltså är $b = 2$. Lutningen på asymptoterna: den med positivt k-värde går genom punkterna $(-2, 3)$ och $(-2.5, 0)$. k-värdet är alltså $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{-2-(-2,5)} = \frac{3}{0,5} = 6$.

Men $k = \frac{b}{a} = \frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = 1/3$.

Svar: $\frac{(y-3)^2}{4} - 9(x+2)^2 = 1$

(8.) $4xy + 7x^2 + 4y^2 = [x \ y]\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$

Vi söker A:s egenvärden. $= \mathbf{x}^T A \mathbf{x}^T.$

$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(4-\lambda) - 4 =$

$= \lambda^2 - 7\lambda - 4\lambda + 28 - 4 = \lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0$

$\lambda = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 24} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{11}{2} \pm \frac{5}{2}$ $\quad \lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 3$

Alltså är $4xy - 5x^2 - 5y^2 = 8\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2$, där $(\tilde{x}, \tilde{y})$ är nya koordinater.

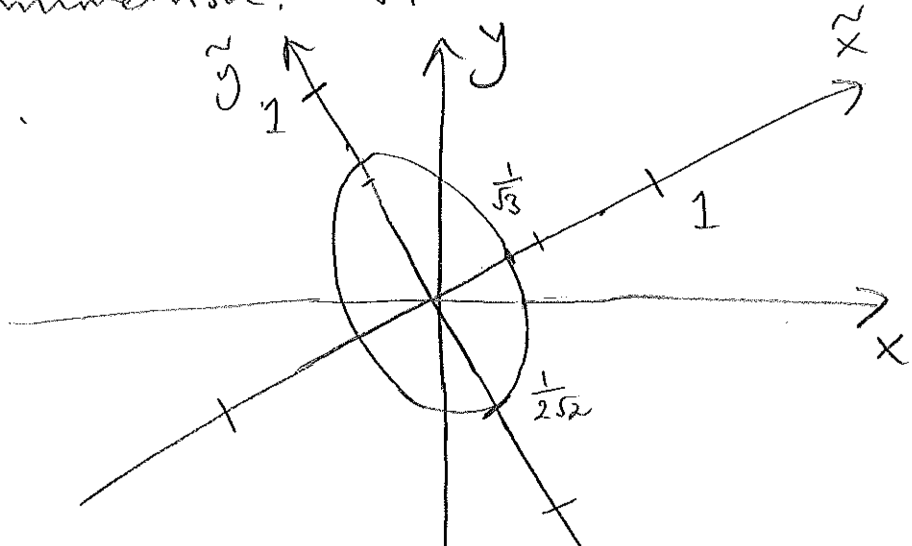
$8\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 = 1$ är en ellips. Nu måste vi hitta de nya axlarna, som pekar åt samma håll som A:s egenvektorer.

$\underline{\lambda_1 = 8:}$ Egenvektorn löser $(A - 8I)\mathbf{x} = 0$.

$A - 8I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Detta ger $-x + 2y = 0$ dvs

$x = 2y$. Vi kan sätta $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Den andra egenvektorn är ortogonal mot $\mathbf{v}_1$ eftersom A är symmetrisk. Vi kan alltså välja $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.



$8\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 = 1$

$\iff$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx \frac{1,4}{4} = 0,35$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \frac{1,7}{3} \approx 0,57$