Lösning till tenta i LGMA40/L9MA45

23/8 2017 Elin Götmark

1. Vi skriver om på standardform:

$y' + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} y = \sin(x)$. Vi söker integrerande faktor: $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln|\cos(x)| = -\ln(\cos(x))$

när $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Så vi ska multiplicera ekvationen med $e^{-\ln(\cos(x))} = \frac{1}{\cos(x)}$. Då får vi: $\left(y \cdot \frac{1}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Så $y \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln(\cos(x)) + C$, och

$y = \cos(x) \cdot (1 - \ln(\cos(x)))$.

2. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 2 = 0$, så $r = -1 \pm \sqrt{1^2 - 2} = -1 \pm i$

Då är $y_h = e^{-x}(A\cos(x) + B\sin(x))$.

För att hitta y_p ansätter vi

$y_p = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$

$y_p' = -2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x)$

$y_p'' = -4C_1 \cos(2x) - 4C_2 \sin(2x)$.

$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = (-4C_1 + 4C_2 + 2C_1)\cos(2x) + (-4C_2 - 4C_1 + 2C_2)\sin(2x) =$

$= \underbrace{(-2C_1 + 4C_2)}_{=0} \cos(2x) + \underbrace{(-4C_1 - 2C_2)}_{=1} \sin(2x) = \sin(2x)$

Vi får $\begin{cases} -2C_1 + 4C_2 = 0 \\ -4C_1 - 2C_2 = 1 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} -C_1 + 2C_2 = 0 \\ -2C_1 - C_2 = 1/2 \end{cases}$ $C_1 = 2C_2$ från (1), sätt in i (2): $-4C_2 - C_2 = 1/2$

Så $C_2 = -1/10$ och $C_1 = -1/5$.

Då är $y = y_h + y_p = e^{-x}(A\cos(x) + B\sin(x))$
$-\frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$.

$y(0) = 0$ ger: $y(0) = A - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$.

$y' = e^{-x}\left(\frac{1}{5}\sin(x) + B\cos(x) - \frac{1}{5}\cos(x) - B\sin(x)\right)$
$+ \frac{2}{5}\sin(2x) - \frac{1}{5}\cos(2x)$.

Så $y'(0) = 0$ ger: $y'(0) = B - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$
$\Rightarrow B = \frac{2}{5}$.

Svar: $y = \frac{e^{-x}}{5}(\cos(x) + 2\sin(x)) - \frac{\cos(2x)}{5} - \frac{\sin(2x)}{10}$.

---

3. Låt $y(t)$ = mängden ämne (i gram) som inte har lösts upp än vid tiden t. Diff.ekvationen blir då $y'(t) = k \cdot y(t) \cdot \left(70 - \frac{(50 - y(t))}{2}\right)$

Enheten för koncentrationerna i parentesen är g/l. Begynnelsevillkoret är $y(0) = 50$ g.

4) a) $\sin(k) \not\to 0$ när $k \to \infty$, så serien är divergent.

b) Vi använder integralkriteriet. Serien konvergerar om $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ gör det.

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = \ln(x) & x = 1 \iff t = 0 \\ dt = \frac{1}{x}\,dx & x \to \infty \iff t \to \infty \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^\infty t\,dt$$ som är uppenbart divergent.

Alltså är serien divergent också.

5. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + B_1(x)x^5$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + B_2(x)x^5$

$$\sin(\ln(1+x)) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + B_2(x)x^5\right)$$
$$-\frac{1}{6}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + B_2(x)x^5\right)^3 + B_3(x)x^5 =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3\right)x^4 +$$
$$+ B_4(x)x^5 = \underline{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + B_4(x)x^5}$$

6. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4(1+\theta\cdot 0{,}1)^4}$, så

$$\ln(1{,}1) = 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} - \frac{0{,}1^4}{4(1+\theta\cdot 0{,}1)^4} =$$

$$= 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}000333\ldots - 0{,}000025 \cdot \frac{1}{(1+\theta\cdot 0{,}1)^4}.$$

$\frac{1}{(1+\theta\cdot 0{,}1)^4}$ ligger mellan 1 och $\frac{1}{1{,}1^4}$.

$1{,}1^2 = 1{,}21 \qquad 1{,}1^3 = 1{,}21 \cdot 1{,}1 = 1{,}331$

$1{,}1^4 = 1{,}331 \cdot 1{,}1 = 1{,}4641. \qquad \frac{1}{1{,}4641} > \frac{1}{1{,}5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$

Så $\ln(1{,}1) = 0{,}095 + 0{,}000333\ldots - R$,

där $0{,}000016 < R < 0{,}000025$

(eftersom $\frac{2}{3} \cdot 25 = \frac{50}{3} > 16$)

$\ln(1{,}1) = 0{,}095333\ldots - R$

Vi ser att R inte kan påverka den fjärde koordinatens värde, så $\underline{\underline{\ln(1{,}1) \approx 0{,}0953}}$

7. Vi kvadratkompletterar:

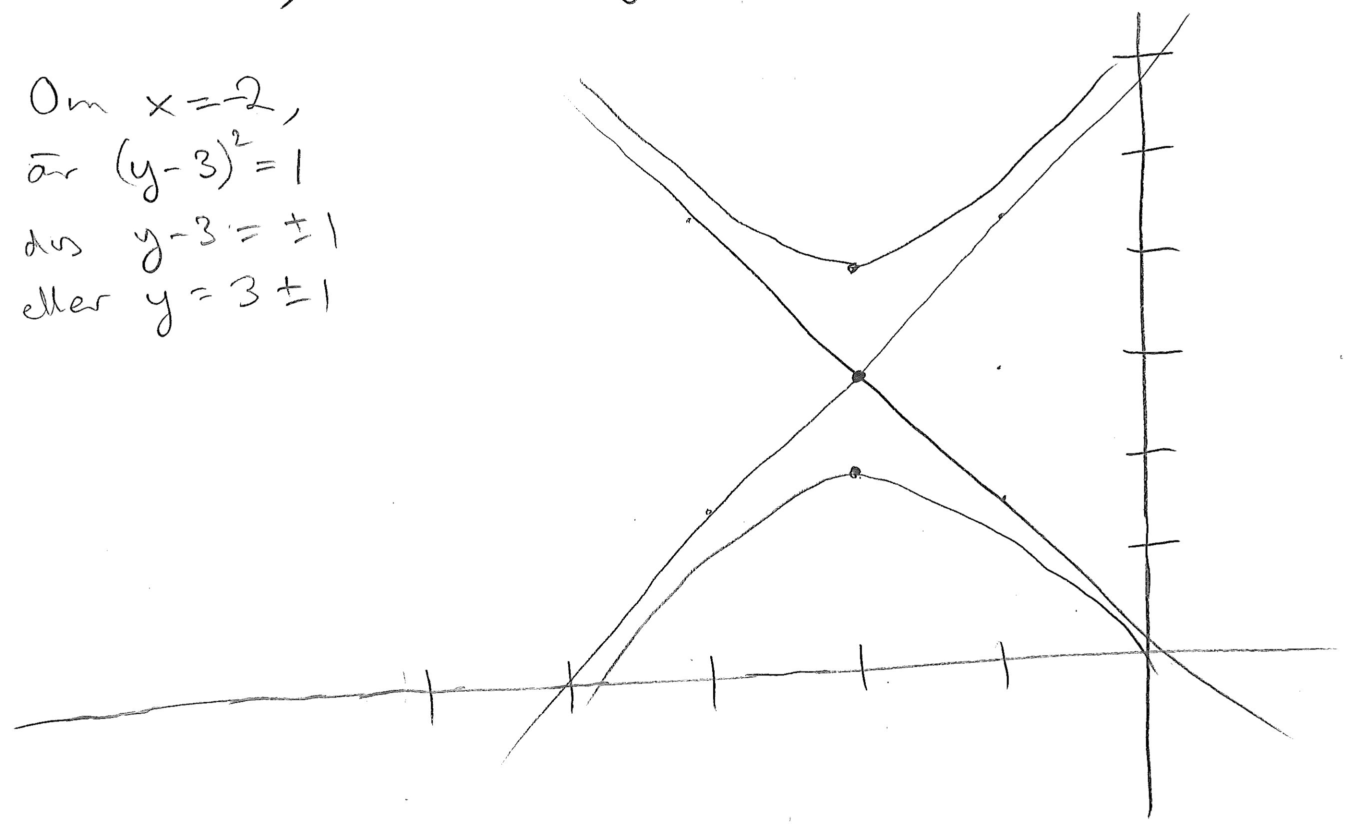
$2x^2 + 8x - y^2 + 6y = 0$

$2(x+2)^2 - 8 - (y-3)^2 + 9 = 0$

$-2(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$

Detta är en hyperbel som skär y-axeln, med centrum i $(-2, 3)$. Hur ser asymptoterna ut? Om vi förenklar och tänker att centrum är i origo, får vi $-2x^2 + y^2 = 1$, dvs $y = \sqrt{1+2x^2} \approx$ $\approx \sqrt{2}x$, så asymptoterna blir $y = \pm\sqrt{2}x$.

Om $x = -2$,
är $(y-3)^2 = 1$
dvs $y - 3 = \pm 1$
eller $y = 3 \pm 1$



8. $16x^2 - 8xy + y^2 = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, där

$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$. Vi tar fram egenvärden och egenvektorer.

$\det(A - \lambda I) = 0$ ger:

$$\begin{vmatrix} 16-\lambda & -4 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (16-\lambda)(1-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 17\lambda = 0$$

dvs $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 17$.

Egenvektor till $\lambda_1 = 0$: Vi löser ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$\begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad x_2 = 4x_1 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

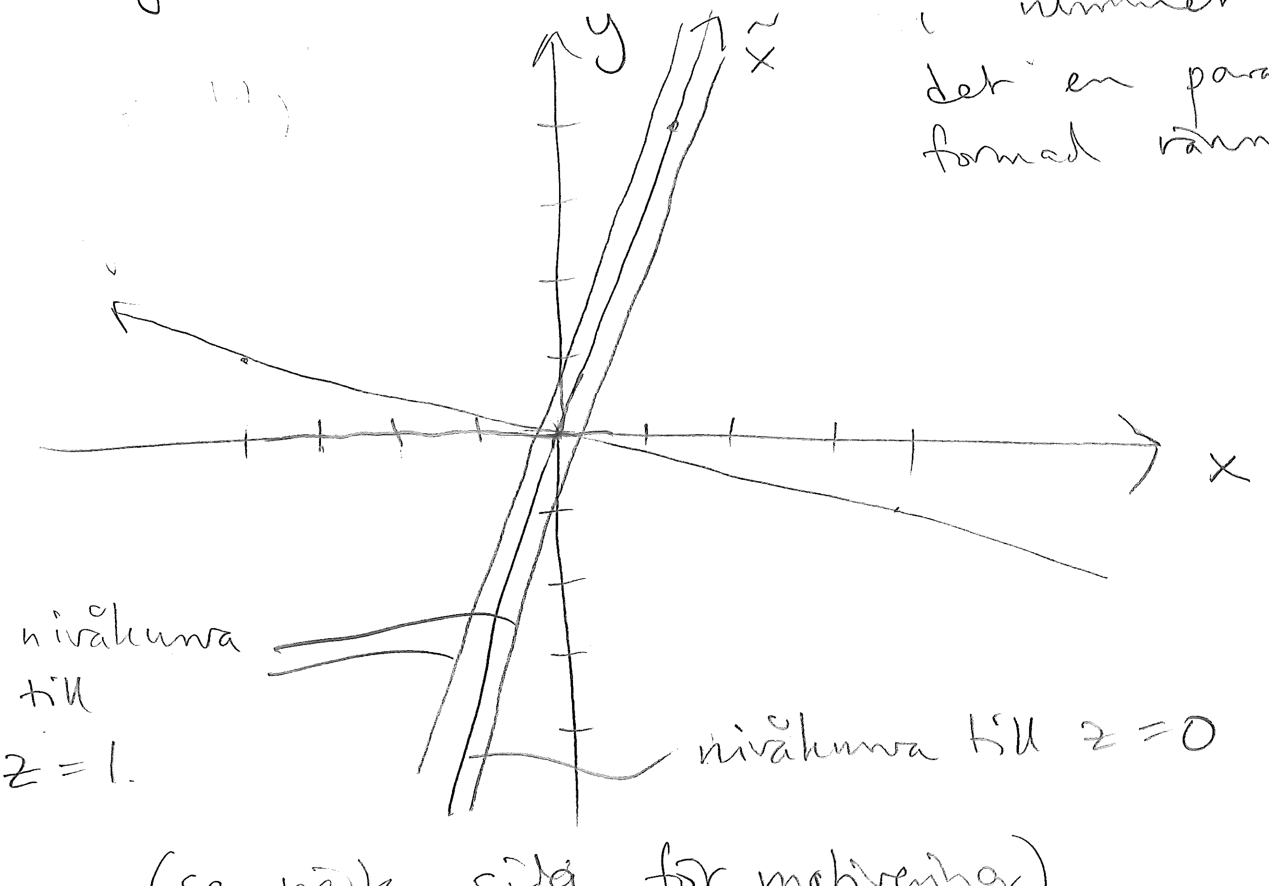
Egenvektor till $\lambda_2 = 17$: Vi löser $(A - 17I)\mathbf{x} = 0$:

$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -4 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad x_1 = -4x_2 \quad v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Då finns det nya koordinater $(\tilde{x}, \tilde{y})$ så att

$16x^2 - 8xy + y^2 = 17\tilde{y}^2$.

$z = 17\tilde{y}^2$ är en parabel i $\tilde{y}z$-planet, och i rummet är det en parabelformad ränna.



(se nästa sida för motivering)

Sätt $z=0$. Då är $17\tilde{y}^2=0$, dvs $\tilde{y}=0$.

Sätt $z=1$. Då är $17\tilde{y}^2=1$, dvs $\tilde{y}^2=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}\approx$

$\approx\pm\frac{1}{4}$