

1.4 Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$

För en allmän diskussion av funktionsbegreppet hänvisar vi till appendix A.2.

Låt D vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. Med en *funktion*

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$$

menar vi en regel som till varje punkt $x = (x_1, \dots, x_n)$ i *definitions-mängden* D ordnar en punkt $y = (y_1, \dots, y_p)$ i $\mathbb{R}^p$. Den senare punkten kallas *värdet* av f i punkten x och vi skriver

$$y = f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

eller ännu mera utförligt

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_p = f_p(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Vi kallar funktionen *reellvärd* om $p = 1$, *vektorvärd* om $p > 1$. En vektorvärd funktion f har alltså p stycken reellvärda komponenter $f_1, \dots, f_p$, alla definierade i D . Allmänna funktioner av detta slag är alldeles för komplicerade för att man skall kunna skaffa sig en fullständig geometrisk bild av dem. Förutom fallet $n = p = 1$ är det bara reellvärda funktioner av *två* variabler som går att beskriva fullständigt med hjälp av en geometrisk figur. Vi skall börja med att ge exempel på sådana funktioner. Det är då bekvämt att beteckna punkterna i $\mathbb{R}^2$ med (x, y) i stället för (x_1, x_2) .

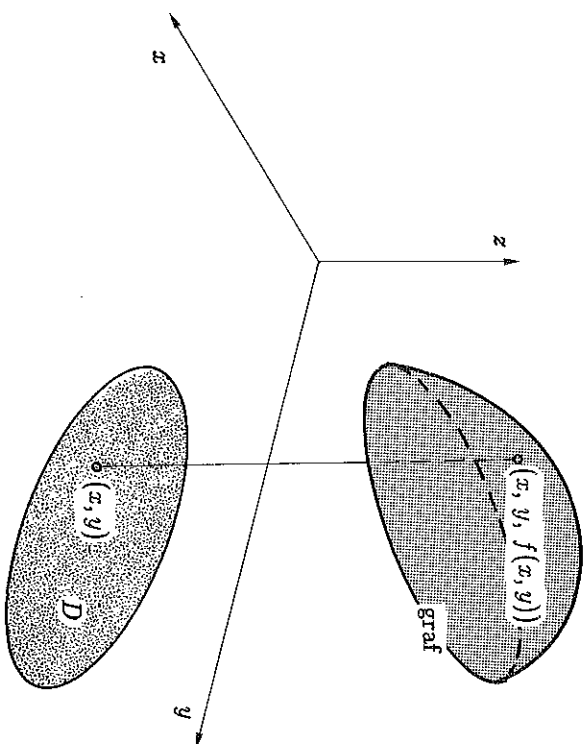
Reellvärda funktioner av två variabler

För en reellvärd funktion

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

av två variabler x och y definierar vi grafen av f som den *tredimensionella* punktmängden

$$\{(x, y, z) ; z = f(x, y) \text{ och } (x, y) \in D\}.$$



Denna bildar en *yta* i rummet, uppspänd rakt ovanför definitionsmängden D .

Det krävs alltså en tredimensionell figur för att åskådliggöra alla detaljer av en funktion på formen $z = f(x, y)$. I praktiken, som till exempel i denna lärobok, är man dock oftast hänvisad till en plan figur och till sin egen föreställningsförmåga i tre dimensioner för att bilda sig en uppfattning om en funktion av två variabler. För att genomskåda en funktionsytas utseende måste man därför tillgripa olika knep. Ett vanligt tillvägagångssätt är att studera ytans skärningskurvor med lämpligt valda plan, ofta sådana som är parallella med eller vinkelräta mot ett koordinatplan. Vi illustrerar med några enkla funktionsgrafer.

Exempel 6. Betrakta funktionen

$$z = f(x, y) = 2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 4. \quad \text{halvsfär}$$

Vi ser att en punkt (x, y, z) ligger på grafen precis då

$$z \leq 2 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4.$$

Grafen utgöres alltså av nedre halvan av sfären med radien 2 och centrum i $(0, 0, 2)$. De i figuren utritade kurvorna utgör skärningar med plan parallella med xy -planet (dvs. cirklar) respektive ett plan genom z -axeln (halvcirkel).

Om vi låter r beteckna avståndet från punkten (x, y) till origo i xy -planet, dvs. $r^2 = x^2 + y^2$, är

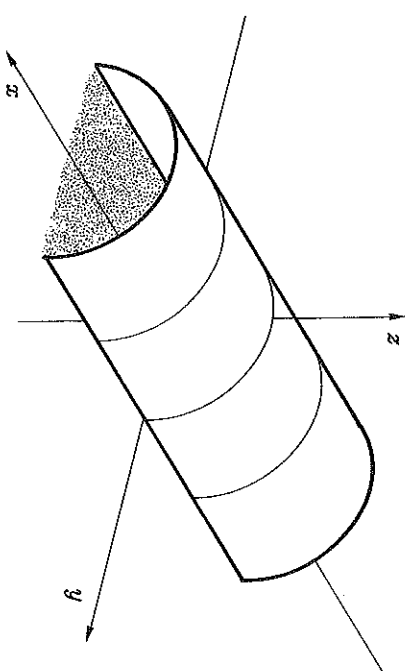
$$f(x, y) = 2 - \sqrt{4 - r^2}.$$

Värdet av f i en punkt beror således bara på dennas avstånd till origo. Att skärningarna mellan grafen och plan parallella med xy -planet är cirklar är en följd av denna *rotationssymmetri*. För rotationssymmetriska funktioner nöjer man sig ofta med att rita skärningskurvan mellan grafen och ett plan genom z -axeln. I vårt fall blir denna en halvcirkel. $\square$

Exempel 7. Funktionen av två variabler

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}, \quad |x| \leq 2, \quad |y| \leq 1, \quad \text{halvsfär}$$

beror inte explicit på variabeln x . (Jämför med en konstant funktion av en variabel.) Grafen genereras genom att halvcirkeln $z = \sqrt{1 - y^2}$ i



yz -planet förflyttas längs x -axeln mellan $x = -2$ och $x = 2$. Vi får på detta sätt en bit av en halvcylinder. Utan några inskränkingar i x -led på definitionsområdet skulle grafen bli en oändligt lång halvcylinder.

Karakteren av cylinderyta är typisk för varje funktion av två variabler som bara beror på den ena av dessa, säg $f(x, y) = \varphi(y)$. Tillhörande funktionsyta genereras genom att förflytta kurvan

$$z = \varphi(y)$$

(belägen i yz -planet) parallellt med x -axeln. □

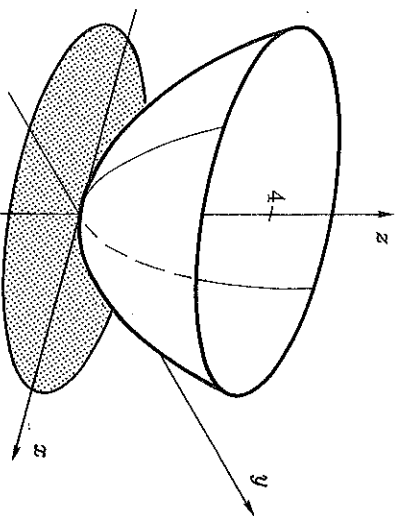
Exempel 8. Betrakta

$$z = f(x, y) = x^2 + 4y^2, \quad x^2 + 4y^2 \leq 4.$$

Skärningarna mellan funktionsytan $z = x^2 + 4y^2$ och plan $z = c$ parallella med xy -planet består av kurvor vars projektion i xy -planet är ellipserna

$$x^2 + 4y^2 = c$$

då $0 \leq c \leq 4$. För övriga c -värden är skärningen tom. Plan parallella med yz -planet ger skärningar i form av parabler. Till exempel $x = 0$ ger parabeln $z = 4y^2$. En yta av detta slag brukar kallas en (elliptisk) paraboloid.

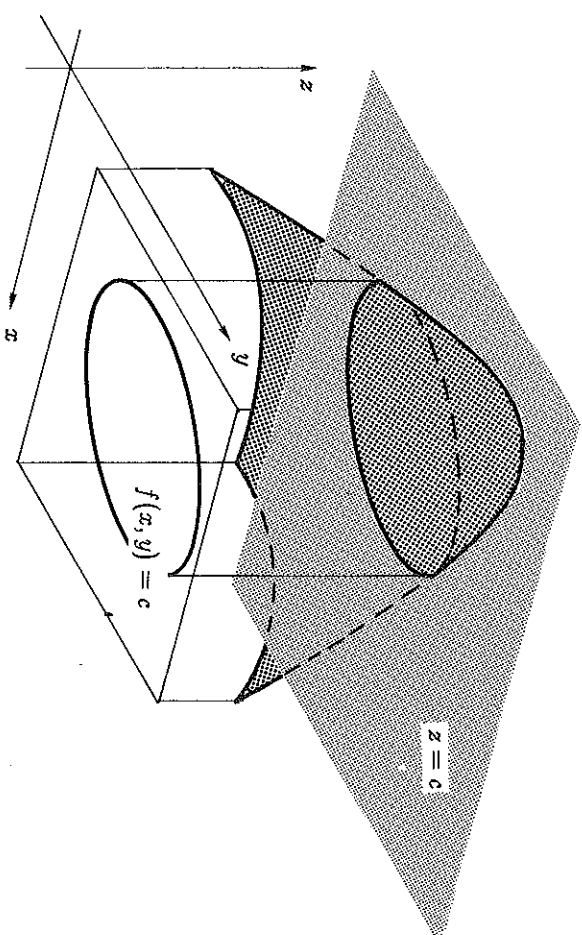


□

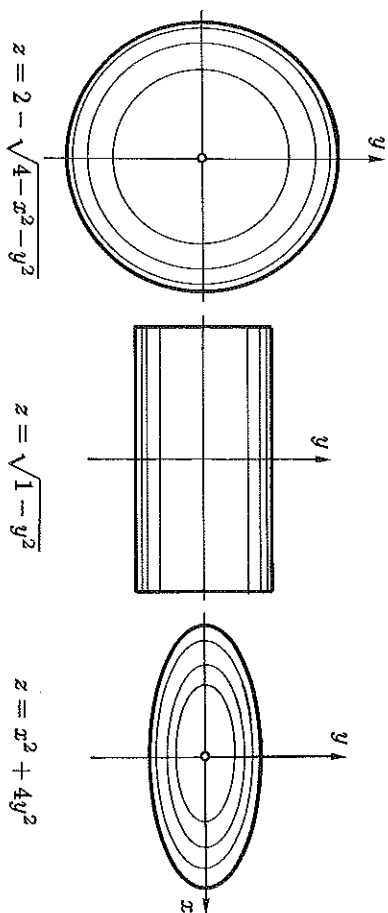
Ett annat vanligt sätt att åskådliggöra en funktion av två variabler, som inte kräver att man avbildar tredimensionellt, är att för olika värden på konstanten c rita de så kallade nivåkurvorna

$$f(x, y) = c$$

i xy -planet. Man får på detta sätt en tvådimensionell (topografisk) *karta*, med vars hjälp man kan utläsa funktionsytans utseende. Denna teknik användes bland annat för väderkartor. Här förekommer *isobarer* och *isotermier* som nivåkurvor till de funktioner som beskriver lufttrycket respektive temperaturen på olika platser.



Exempel 9. I nedanstående figurer (nästa sida) har vi ritat upp ett antal nivåkurvor för funktionerna i exempel 6, 7 och 8. I det första fallet blir nivåkurvorna cirklar, vilket återspeglar funktionens rotations-symmetri. I exempel 7 blir nivåkurvorna linjer parallella med x -axeln, eftersom funktionen är oberoende av x . I det sista exemplet får vi ellipser.



□

Reellvärda funktioner av tre variabler

Betrakta nu en reellvärd funktion

$$u = f(x, y, z)$$

av tre variabler. Grafen av denna funktion utgöres av punktmängden

$$\{(x, y, z, u) ; u = f(x, y, z) \text{ och } (x, y, z) \in D_f\}$$

i det fyrdimensionella rummet $\mathbf{R}^4$. Tyvärr saknar vi geometrisk uppfattning i fyra dimensioner. Det är därför omöjligt att skaffa sig en fullständig geometrisk bild av en funktion av tre variabler. Man får i allmänhet nöja sig med att studera funktionens nivåytor

$$f(x, y, z) = c$$

i det tredimensionella rummet. Utseendet av dessa kan ge en rätt så god uppfattning om funktionen. För att ta ett konkret exempel så har funktionen

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

nivåytor i form av koncentriska sfärer runt origo.

Kurvor

En vektorvärd funktion av en variabel med värden i $\mathbf{R}^n$, alltså en funktion av formen

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

kallas en n -dimensionell kurva i $\mathbf{R}^n$. För $n = 2$ och $n = 3$ talar man om en plan kurva respektive en rymdkurva. Dessa två fall kan åskådliggöras genom att man ritat funktionens värdemängd i $\mathbf{R}^2$ respektive $\mathbf{R}^3$. Variabeln t brukar kallas parameter, och definitionsområdet utgöres vanligen av ett intervall på reella axeln. Parametern definierar också en bestämd genomloppsriktning eller orientering av kurvan.

Olika funktioner från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}^n$ kan ha samma värdemängd och generera samma orientering av denna. De säges då utgöra olika parameterframställningar av en och samma kurva.

Exempel 10. Från den linjära algebran är det välbekant att

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R},$$

är en ekvation på parameterform för linjen genom punkten (x_0, y_0, z_0) med riktningsvektorn (α, β, γ) . Denna linje är alltså värdemängd till funktionen

$$t \mapsto (x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t, z_0 + \gamma t).$$

□

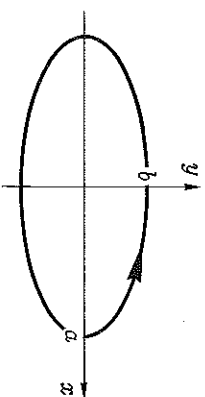
Exempel 11. Funktionen

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

beskriver en ellips i planet med halvaxlarna a och b , genomfören ett varv i positiv led. Samma ellips har till exempel den alternativa parameterframställningen

$$\begin{cases} x = a \cos 2\pi t \\ y = b \sin 2\pi t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

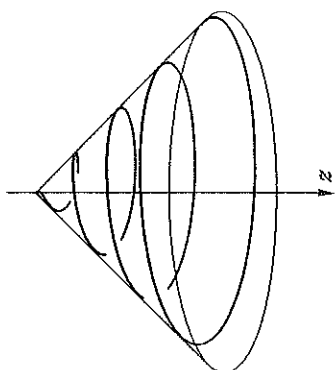
□



Exempel 12. Rymdkurvan

$$\begin{cases} x = \theta \cos \theta \\ y = \theta \sin \theta \\ z = a\theta, \end{cases} \quad \theta \geq 0,$$

representerar en *konisk skruvlinje* med stigningen $2\pi a$. Konens halva öppningsvinkel är $\arctan \frac{1}{a}$. $\square$



En plan kurva kan också beskrivas som nivåkurva till någon reellvärd funktion av två variabler. Till exempel har ellipsen i exempel 11 också ekvationen

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Man preciserar då ingen speciell parameter, och anger ingen orientering.

Ellipsen är en av de så kallade andragradskurvorna. De övriga är

2) hyperbler,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

3) parabler,

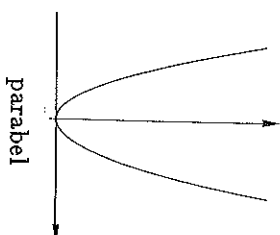
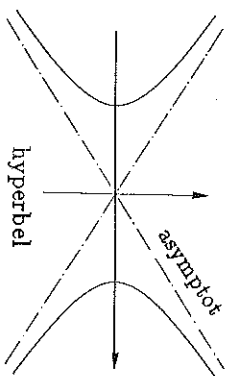
$$y = \frac{x^2}{a^2},$$

4) och skärande rätta linjer,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Hyperbeln har till exempel parameterframställningen

$$\begin{cases} x = a \cosh t = a \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = b \sinh t = b \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.4. FUNKTIONER FRÅN $\mathbb{R}^n$ TILL $\mathbb{R}^p$

21

Ytor

På en kurva finns en frihetsgrad, representerad av parametern t i en parameterframställning. För att beskriva en yta i rymden behövs två parametrar, dvs. en funktion

$$(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

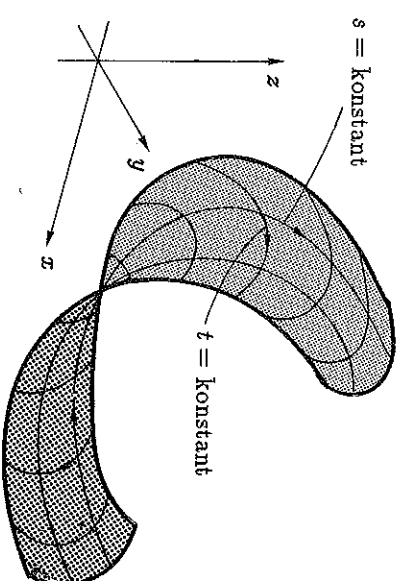
från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$. Man kan tänka sig ytan uppbyggd av två skaror av kurvor, nämligen parameterkurvorna

$$s \mapsto (x(s, t_0), y(s, t_0), z(s, t_0))$$

och

$$t \mapsto (x(s_0, t), y(s_0, t), z(s_0, t))$$

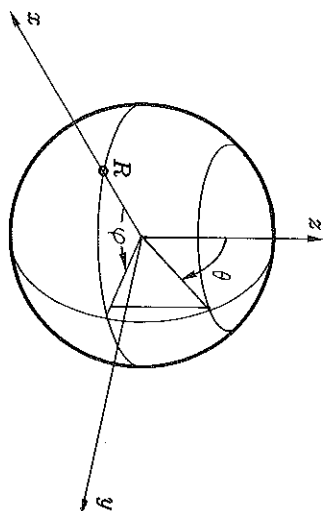
för fixa värden t_0 och s_0 på parametrarna t och s . Vanligtvis ritas man några sådana kurvor när man åskådliggör en yta.



Exempel 13. Funktionen

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta, \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \end{aligned}$$

beskriver en sfär med radien R och medelpunkt i origo. Detta val av parametrar på en sfär brukar kallas *sfäriska koordinater*. Parameterkurvorna utgöres av bredd- och längdgrader svarande mot $\theta = \text{konstant}$



respektive $\varphi = \text{konstant}$. (Lägg dock märke till att θ betyder vinkeln mot positiva z -axeln, inte mot xy -planet.) $\square$

ÖBS! På en funktionsyta $z = f(x, y)$ är x och y parametrar. Ytan kan skrivas

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = f(s, t). \end{cases}$$

Parameterkurvorna har således formen $s \mapsto (s, b, f(s, b))$ respektive $t \mapsto (a, t, f(a, t))$. De uppstår genom att man skär funktionsytan med plan $y = b$ respektive $x = a$. En funktionsyta karakteriseras av att varje rät linje parallell med z -axeln skär ytan i högst en punkt. Sfären i ovanstående exempel är alltså ingen funktionsyta. Däremot kan överdelen och underdelen av sfären var för sig betraktas som en funktionsyta. Motsvarande funktioner är då

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2,$$

respektive

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2.$$

Ibland beskriver man en yta som en nivåyta

$$f(x, y, z) = c$$

till en funktion f av tre variabler. Man anger då inte något bestämt parameterintervall. Oftast kan vissa delar av en sådan yta betraktas som en funktionsyta $z = g(x, y)$, alternativt $y = h(x, z)$ eller $x = k(y, z)$.

Exempel 14. Sfären i föregående exempel kan också betraktas som nivåytan

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

till $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Överdelen kan som vi redan sett beskrivas som funktionsytan

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2.$$

På samma sätt kan den del av sfären som ligger i halvplanet $x \geq 0$ beskrivas med funktionen

$$x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}, \quad y^2 + z^2 \leq R^2.$$

$\square$

Sfären är ett specialfall av de så kallade andragradsytor. Dessa är ellipsoider,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

eller hyperboloider, enmantlade

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

och tvåmantlade

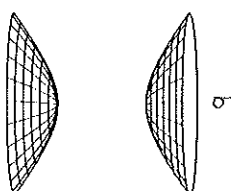
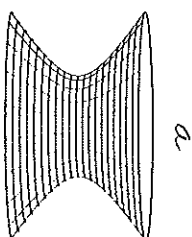
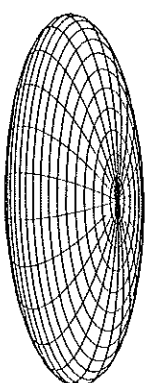
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

eller paraboloider, elliptiska

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

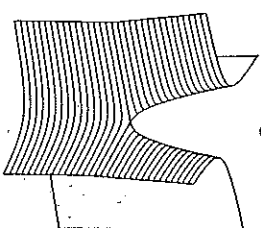
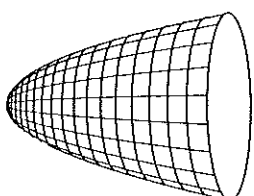
och hyperboliska

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$



a

b



// koner

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

samt olika slags *cylindrar*, ellip-_atiska

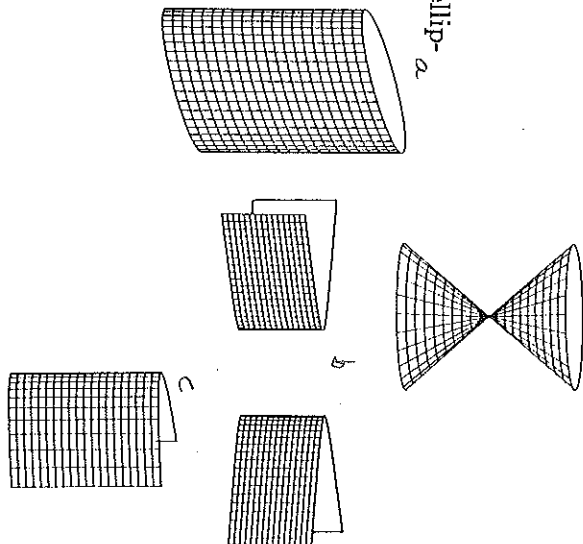
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

hyperboliska

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

och paraboliska

$$x = \frac{y^2}{b^2}.$$



Koordinatbyten

Låt oss slutligen säga några ord om funktioner från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^n$ (med samma n). Sådana funktioner uppträder ofta i form av *variabelbyten* i konkreta problem. Man kräver då av funktionen att den skall vara en bijektiv avbildning mellan två områden i $\mathbf{R}^n$. Precis som i envariabelanalysen är ett lämpligt variabelbyte ofta ett effektivt hjälpmedel vid lösning av vissa problem.

Exempel 15. Ett av de vanligaste koordinatbytena i planet är övergången från rätvinkliga till *polära koordinater*. Sambandet

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

definierar en bijektiv avbildning av området $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ i $r\varphi$ -planet på området $(x, y) \neq (0, 0)$ i xy -planet. Det rätvinkliga rutnätet givet av linjerna

$$r = \text{konstant}, \quad \varphi = \text{konstant}$$

i $r\varphi$ -planet svarar mot ett deformationerat "rutnät" i xy -planet uppbyggt av cirklar kring origo (svarande mot $r = \text{konstant}$) och halvstrålar från origo (svarande mot $\varphi = \text{konstant}$).