Tentamensliknande uppgifter LGMA50

Här följer en lista tentaliknande exempeluppgifter som skulle kunna komma på tentan. Det är dock ingen fullständig lista - allt vi har gått igenom på kursen kan dyka upp. Tentan kommer också att innehålla någon svårare uppgift där man inte bara kan använda standardmetoder. Detta är heller ingen exempeltenta, det finns många fler uppgifter här än på en vanlig tenta.

1. Beräkna $\gcd(454, 28)$. Hitta sedan alla heltalslösningar till var och en av följande diofantiska ekvationer:
   (a) $454x + 28y = 1$
   (b) $454x + 28y = 2$
   (c) $454x + 28y = 10$
2. Hitta alla heltal x, y som uppfyller $23x + 17y = 2019$ och $x \geq 0$ och $y \geq 0$.
3. Hitta en heltalslösning till ekvationen $528x + 233y = 1$.
4. Hitta alla lösningar till följande ekvationssystem
$$\begin{cases} x \equiv 23 \mod 71 \\ x \equiv 31 \mod 90 \end{cases}$$
5. Hitta alla lösningar till följande ekvationssystem
$$\begin{cases} x \equiv 5 \mod 8 \\ x \equiv 9 \mod 13 \\ x \equiv 7 \mod 15 \end{cases}$$
6. Hitta alla lösningar till följande ekvationssystem
$$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 8 \mod 11 \end{cases}$$
7. Hitta alla lösningar till följande ekvation:
$$12x \equiv 28 \mod 148$$
8. Hitta alla lösningar till följande ekvation:
$$15x \equiv 25 \mod 125$$
9. Beräkna 3^{437} modulo 13. Ditt svar skall ligga mellan 0 och 13.
10. Beräkna 5^{437} modulo 12. Ditt svar skall ligga mellan 0 och 12.
11. Beräkna 17^{131} modulo 241 med successiv kvadrering. Ditt svar skall ligga mellan 0 och 240.

12. Beräkna
    (a) $\phi(99)$
    (b) $\phi(5^3 \cdot 31^2)$
    (c) $\sigma(99)$
    (d) $\sigma(5^3 \cdot 31^2)$

13. Är 8128 ett perfekt tal? Motivera ditt svar!

14. Hitta ett x mellan 0 och 200 så att $x^{123} \equiv 41 \mod 200$.

15. Använd "Fermats nedstigningsprocedur" för att skriva primtalet 2341 som en summa av två kvadrater. Hitta alltså heltal a och b så att $a^2 + b^2 = 2341$. Som utgångspunkt kan du använda att $200^2 + 167^2 = 29 \cdot 2341$.

16. Skriv följande tal som en summa av två kvadrater av heltal, eller förklara varför detta inte är möjligt. Inga av talen är primtal.
    (a) 290
    (b) 153
    (c) 270
    (d) 158760

17. Beräkna följande Legendre-symboler. Talet 9043 är ett primtal.
    (a) $\left(\frac{-1}{9043}\right)$
    (b) $\left(\frac{2}{9043}\right)$
    (c) $\left(\frac{70}{9043}\right)$
    (d) $\left(\frac{30285}{9043}\right)$

18. Har ekvationen $x^2 \equiv 73 \mod 701$ några heltaltslösningar? Motivera ditt svar!

19. Har ekvationen $x^2 + 12x + 7 \equiv 0 \mod 311$ några heltaltslösningar? Motivera ditt svar!

20. Utför följande beräkningar i ringen $\mathbb{Z}_3[x] \times \mathbb{Z}_5$:
    (a) $(2x + 1, 4) + (x^2 + 2x + 1, 3)$
    (b) $(2x + 2, 3) \cdot (x^2 + 2, 4)$
    (c) $(x + 1, 2)^3$

21. Lös ekvationen $17x = 235 + 3x$ i ringen $\mathbb{Z}_{509}$.

22. Hur många element i ringen $\mathbb{Z}_{1311}$ har multiplikativ invers? Motivera ditt svar!

23. Låt $\sigma, \tau \in S_6$ med

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

    (a) Skriv σ och τ i cykel-notation.
    (b) Beräkna $\sigma \circ \tau$ och $\tau \circ \sigma$.
    (c) Hitta σ^{-1} och τ^{-1}
    (d) Skriv σ respektive τ som produkter av transpositioner.

24. Utför följande beräkningar i ringen av Gaussiska heltal $\mathbb{Z}[i]$.

    (a) Skriv talet $10 + 10i$ som en produkt av Gaussiska primtal.

    (b) Skriv talet 41 som en produkt av Gaussiska primtal.

    (c) Har ekvationen $2 + i + z \cdot (1 + 3i) = z \cdot (2 + 5i)$ några lösningar i $\mathbb{Z}[i]$? Hitta i så fall dessa!

25. Visa att $\alpha = (5 + \sqrt{7})^{\frac{1}{3}}$ är ett algebraiskt heltal genom att hitta ett polynom $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ som uppfyller $p(\alpha) = 0$.

26. Vi inför en relation $\sim$ på $\mathbb{N}$ genom att definiera

$$a \sim b \Longleftrightarrow gcd(a, b) \neq 1$$

    Är relationen

    (a) Reflexiv?

    (b) Symmetrisk?

    (c) Transitiv?

    Motivera dina svar!

27. Låt $P = \{5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$ vara mängden primtal ≥ 5. Vi inför en relation på P genom att definiera

$$p_1 \sim p_2 \Leftrightarrow |p_1 - p_2| < 3$$

    Är relationen $\sim$

    (a) Reflexiv?

    (b) Symmetrisk?

    (c) Transitiv?

    (d) En ekvivalensrelation? Hur kan du i så fall beskriva ekvivalensklasserna?

28. Vi definierar en binär operation $\star$ på mängden $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ enligt följande:

$$(x, y) \star (a, b) = (x + b, y + a)$$

    (a) Är $\star$ associativ?

    (b) Är $\star$ kommutativ?

    (c) Har $\star$ ett identitetselement?

    (d) Vilka element i M har inverser?

29. Markera följande påståenden som sanna eller falska. Motivera dina svar!

    (a) $-5|100$ i ringen $\mathbb{Z}$

    (b) $\pi|10$ i ringen $\mathbb{R}$

    (c) $3 + i|6 + 3i$ i ringen $\mathbb{Z}[i]$.

    (d) $x + 1|x^2 + 1$ i ringen $\mathbb{Z}[x]$?

    (e) $x + 1|x^2 + 1$ i ringen $\mathbb{Z}_2[x]$?

30. Definiera en egen binär operation $\star$ på $\mathbb{Z}$ på så vis att 3 blir identitetselementet i $(\mathbb{Z}, \star)$.

31. Vilka av följande magma är associativa? kommutativa? Har identitetselement? Är grupper?

   (a) $(\mathbb{N}, *)$ där $a * b = a + b - 1$
   (b) $(\{a, b\}, \cdot)$ där $a \cdot b = a \qquad b \cdot a = a \qquad a \cdot a = b \qquad b \cdot b = b.$
   (c) $(\mathbb{N}, \square)$ där $a \square b = \max(a, b)$, alltså det största av a och b.
   (d) $(\{\text{Alla delmängder av } \mathbb{N}\}, \cap)$ där $A \cap B$ som vanligt är snittet av mängderna A och B.

32. Låt $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ vara de positiva reella talen. Visa att grupperna $(\mathbb{R}, +)$ och $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ isomorfa! Tips: använd exponentialfunktionen.

33. Markera varje påstående nedan som antingen sant eller falskt. Endast svaret räknas!

   (a) $(\mathbb{N}, +)$ är en grupp.
   (b) $37^{41} \equiv 37 \mod 41$.
   (c) $41^{37} \equiv 1 \mod 41$
   (d) Vi har $\left(\frac{p}{41}\right) = \left(\frac{41}{p}\right)$ för alla primtal $p > 2$ (Legendre-symboler).
   (e) $a \star b = \sqrt{a^2 + b^2}$ är en binär operation på $\mathbb{N}$.
   (f) Magman $(\mathbb{R}, \cdot)$ har ett identitetselement.
   (g) $\phi(N) \geq \phi(n)$ när $N > n$.
   (h) Ekvationen $x^2 \equiv 2 \mod 101$ saknar lösning.
   (i) $(\mathbb{Z}_{93}, +, \cdot)$ är en kropp.
   (j) Ringen $\mathbb{Z}_6[x]$ är kommutativ.
   (k) 43 är ett Gaussiskt primtal.

Svar

1. $gcd(454, 28) = 2$.
   (a) Lösningar saknas
   (b) $(x, y) = (5 + 14k, -81 - 227k)$ för $k \in \mathbb{Z}$ (exempelvis)
   (c) $(x, y) = (25 + 14k, -405 - 227k)$ för $k \in \mathbb{Z}$ (exempelvis)
2. $(x, y) \in \{(5, 112), (22, 89), (39, 66), (56, 43), (73, 20)\}$
3. $(x, y) = (109, -247)$ exempelvis
4. $x \equiv 2011 \mod 6390$
5. $x \equiv 997 \mod 1560$
6. $x \equiv 206 \mod 1155$
7. $x = 27 + 37k$ för $k \in \mathbb{Z}$, eller $x \equiv 27$,$x \equiv 64$,$x \equiv 101$,$x \equiv 138 \mod 148$.
8. $x = 10 + 25k$ för $k \in \mathbb{Z}$, eller $x \equiv 10$,$x \equiv 35$,$x \equiv 60$,$x \equiv 85$,$x \equiv 110 \mod 125$.
9. 9
10. 5
11. 28
12. (a) 60 (b) 93000 (c) 156 (d) 154908
13. Ja, $8128 = 127 \cdot 2^6$, $\sigma(8128) = 2 \cdot 8128$.
14. $x = 81$
15. $2341 = 46^2 + 15^2$
16. T.ex: (a) $11^2 + 13^2$ (b)$3^2 + 12^2$ (c)går ej (d)$126^2 + 378^2$
17. (a) -1 (b)-1 (c)1 (d)-1
18. Nej
19. Nej
20. (a) $(x^2 + x + 2, 2)$ (b) $(2x^3 + 2x^2 + x + 1, 2)$ (c) $(x^3 + 1, 3)$
21. $x = 344$
22. 792 stycken ($\phi(1311) = 792$)
23. (a) $\sigma = (1, 5)(2, 3, 4, 6)$, $\tau = (1, 2, 4)(5, 6)$
    (b) $\sigma \circ \tau = (1, 3, 4, 5, 2, 6)$,$\tau \circ \sigma = (1, 6, 4, 5, 2, 3)$
    (c) $\sigma^{-1} = (1, 5)(2, 6, 4, 3)$, $\tau^{-1} = (1, 4, 2)(5, 6)$
    (d) $\sigma = (1, 5) \circ (2, 6) \circ (2, 4) \circ (2, 3)$, $\tau = (1, 4) \circ (1, 2) \circ (5, 6)$
24. (a) $(1 + i)^2(1 - i)(2 + i)(2 - i)$ (b) $(5 + 4i)(5 - 4i)$ (c) Lösning i $Z[i]$ saknas
25. $p(\alpha) = 0$ för $p(x) = (x^3 - 5)^2 - 7 = x^6 - 10x^3 + 18$
26. (a) Nej $(1 \sim 1)$ (b)Ja (c)Nej

27. (a),(b),(c),(d): Ja! Ekvivalensklasserna består av primtalstvillingar.

28. (a)Nej (b)Nej (c)Nej (d)Inga, identitetselement saknas ju!

29. abcde: SSFFS

30. Exempelvis $a \star b = a + b - 3$

31. (a) ass. komm. id=1. Ej grupp (inverser saknas)
(b) ass. komm. id=b. Grupp ($\sim (\mathbb{Z}_2, +)$)
(c) ass. komm. id=1. Ej grupp, (inverser saknas)
(d) ass. komm. id=$\mathbb{N}$. Ej grupp (inverser saknas)

32. Låt $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$, $\varphi(x) = e^x$. Då är φ en homomorfism: $\varphi(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, och φ är bijektiv (inversen ges av $\ln(x)$).

33. abcdefghijk: FSFSFSFSFSS