

Föreläsning 2: Problemlösning, Fermi-problem och dimensionsanalys

Lärandemål

- Använda enkla strategier vid problemlösning, så som att testa rimlighet av resultat
- Känna till och "lösa" Fermi-problem
- Dimensionsanalys

Exempel - Problem lösning

Två tåg startar i stad A och stad B som ligger på ett avstånd av 100 km. Tåg A färdas med hastighet 90 km/h, och tåg B med hastighet 110 km/h. När och var möts tågen?

Vi börjar med att införa notation som beskriver vårt problem. Vi låter $L = 100\text{km}$ vara avståndet mellan de två städerna, $v_A = 90\text{km/h}$, $v_B = 110\text{km/h}$ hastigheterna för de två tågen. Känner vi till någon ekvation som beskriver hur sträcka och hastighet hänger ihop?

$$s = vt$$

där s är sträckan färdad efter tid t för ett objekt som rör sig med konstant hastighet v . Vi beskriver nu avståndet för tåg A från stad A , y_A , samt avståndet för tåg B till stad A , y_B .

$$\begin{cases} y_A = v_A t \\ y_B = L - v_B t \end{cases}$$

Vi har nu ett system av två linjära ekvationer! Detta kan lösas! Frågan är när är $y_A = y_B$? Svaret är $t = \frac{L}{v_A + v_B}$. Och positionen för var de möts ges av att sätta in detta värde på t i valfri ekvation ovan. Mötespunkten blir då $y_A = y_B = \frac{v_A L}{v_A + v_B}$. Vi kan testa rimlighet genom att ställa några frågor:

- Om ett av tågen ökar (minskar) hastigheten, förutser då vår modell att tiden för möte minskar (ökar)?
- Vad förutsäger modellen om ett av tågen (eller båda) har hastighet 0?
- Om båda har samma hastighet?

Fermi problem

Kommer från fysikern Enrico Fermi (1901-1954) som ansågs vara mycket duktig på att göra "uppskattningar". Det typiska exemplet är

Hur många pianostämmor finns i Sverige?

- Ungefär 9 miljoner invånare
- 2 personer per hushåll
- 1/20 av alla hushåll har piano
- Stäms 1 gång per år

Detta ger

$$\frac{9 \cdot 10^6}{2} \frac{1}{20} = 2.25 \cdot 10^5 \text{ stämningar per år}$$

Det tar ca. 2 h att stämma ett piano. En pianostämmare som jobbar 8h per dag, 5 dagar per vecka, 48 veckor per år hinner med 960 stämningar per år. Då får vi

$$\frac{2,25 \cdot 10^5}{960} \approx 234 \text{ pianostämmare i Sverige}$$

Diskussion

Låt oss nu göra ett eget exempel och testa hur bra vår approximation blir. **Hur många kg kaffe förbrukar svenska folket på ett år?**

Dimensionsanalys - är 1 kg mer än 2 meter?

Dimensionsanalys bygger på det faktum att storheter som jämförs skall ha samma dimension. Liksom ska alla meningsfulla ekvationer ha samma dimension på båda sidor om likhetstecknet.

Inom mekaniken är de fundamentala dimensionerna *längd* (L), *massa* (M), och *tid* (T). För att mäta används enheter (meter, sekunder, år, ...).

Man kan använda dimensionsanalys som ett verktyg för att "gissa formler" och utesluta felaktiga, och man kräver att dimensionen hos en storhet är densamma som dimensionerna hos de storheter den (kan tänkas) beror på,

$$X = C X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}$$

där C är en dimensionslös konstant. Detta görs genom att välja $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ så att dimensionerna är lika på båda sidor.