Föreläsning 3: Dynamiska modeller

Lärandemål

- Formulera och använda tidsdiskreta modeller
- Formulera och använda tidskontinuerliga modeller
- Utföra stabilitetsanalys
- Se exempel på härledning samt användning av modeller inom biologi

Vi skiljer på två huvudtyper av modeller

- Tidsdiskreta: $y_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}, \ldots y_0)$
- Tidskontinuerliga: $\frac{dy}{dt} = f(y, t)$

Modeller med diskret tid lämpar sig då man modellerar exempelvis generationer eller "omgångar".

Exempel 1 (Malthusian Growth)**.** *Låt N_n vara storleken på en population vid tidssteg n. Ett enkelt exempel på tidsdiskret modell ges av $N_{n+1} = \lambda N_n$, alltså populationen växer med en faktor $\lambda > 1$ vid varje tidssteg. Om populationsstorleken vid start var N_0, ges lösningen av $N_n = \lambda^n N_0$.*

Diskussion

Vad har modellen för styrkor och svagheter?

Det finns exempel på populationer där en tidsdiskret modell passar bäst. Exempelvis finns insekter med distinkta icke-överlappande generationer där mogna insekter lägger ägg innan de dör på våren eller sommaren. Ur äggen kommer larver som till kommande års vår har hunnit mogna för att lägga egna ägg.

Tidskontinuerliga modeller

I tidskontinuerliga modeller beskrivs populationen (koncentration, antal individer etc.) som en funktion $N = N(t)$, där t nu är ett reellt tal och inte heltal.

Låt b vara tillväxttakten hos en population, så att sannolikheten att en individ producerar en annan individ i intervallet $[t, t + \Delta t]$ är $b\Delta t + O(\Delta t^2)$ (detta kommer från att delningen är Poisson fördelad, och sannolikheten för mer än en delning är försumbar när Δt är litet nog). Låt d vara dödstakten, så att sannolikheten att en individ dör i intervall $[t, t+\Delta t]$ är $d\Delta t + O(\Delta t^2)$. Då kan vi titta på populationen ett litet steg fram i tiden.

$$
\begin{aligned}
N(t+\Delta t) &= N(t) + b\Delta t N(t) - d\Delta t N(t) + O(\Delta t^2) \\
\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= (b-d)N(t) + O(\Delta t)
\end{aligned}
$$

om man nu låter $\Delta t \to 0$, så får vi

$$N'(t) = (b-d)N(t)$$

Med begynnelse data $N_0 = N(0)$ får vi lösningen $N(t) = N_0 e^{(b-d)t}$. Därför har vi att för $t \to \infty$

$$
\begin{cases}
N \to 0 \text{ om } b < d \\
N \to \infty \text{ om } b > d \\
N(t) = N_0 \text{ om } b = d
\end{cases}
$$

I allmänhet så kan man beskriva **densitets beroende** tillväxt eller död med hjälp av

$$N'(t) = f(N(t))$$

där $f(N(t)) = (b-d)N(t)$ ovanför.

I många fall vet man att då densiteten blir tillräckligt hög börjar tillväxten minska eller döden öka. Ett klassiskt exempel på en modifiering av ovanstående högerled är $f(N) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$, som kallas **Logistiska ekvationen**, eller $f(N) = rN \log\left(\frac{K}{N}\right)$ som kallas **Gompertz ekvation**. Gemensamt för dessa två högerled är att populationen är begränsad. Konstanten K kallas bärförmåga och beskriver jämviktspunkten då $t \to \infty$.

En jämvikts punkt är en punkt N^* som uppfyller $f(N^*) = 0$, vilket då skulle ge $N'(t) = 0$, med andra ord, populationen är i jämvikt och förändras ej mer. Givet att en eller flera jämviktspunkter existerar kan man fråga om den är stabil. En sådan punkt kallas stabil i fall en liten störning återgår till jämvikten.

Stabilitetsanalys

Antag att vi har ekvationen $N'(t) = f(N)$ med en jämviktspunkt N^*, så att $f(N^*) = 0$. Definiera $\epsilon(t) = N(t) - N^*$, avvikelsen från jämvikten, som vi antar är mycket liten

($\epsilon << 1$). Vi vill veta om avvikelsen växer sig stor eller blir liten. Vi deriverar och får

$$\begin{aligned}\epsilon'(t) &= N'(t)\\ &= f(N)\\ &= f(N^* + \epsilon(t))\\ &= f(N^*) + \epsilon(t)f'(N^*) + \frac{1}{2}\epsilon(t)^2 f''(N^*) + O(\epsilon^3)\end{aligned}$$

Nu vet vi att $f(N^*) = 0$ och vi "ignorerar" termer av ordning ϵ^2 och högre, då ϵ är litet. Vi har då att

$$\epsilon'(t) = \epsilon(t)f'(N^*)$$

som har lösningen $\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{f'(N^*)t}$. Därmed får vi följande resultat:

$$\begin{cases}\text{Punkten } N^* \text{ är stabil om } f'(N^*) < 0\\ \text{Punkten } N^* \text{ är instabil om } f'(N^*) > 0\end{cases}$$

Exempel 2 (Stabilitetsanalys av Logistiska ekvationen)**.** *Nu undersöker vi stabiliteten hos den Logistiska ekvationen*

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

så för $r \neq 0$ *har vi två jämvikter,* $N^* = 0$ *eller* $N^* = K$*. Vidare har vi* $f'(N) = r - \frac{2rN}{K}$*. Vi ser därför att* $f'(0) = r > 0$ *som är instabil, samt* $f'(K) = -r < 0$ *som alltså är stabil.*

Exempel 3 (SIR-modellen)**.** *Den s.k. SIR-modellen ligger till grunden för moderna modeller för smittspridning. Vi definierar* $S(t), I(t)$ *och* $R(t)$ *som andelen Mottagliga, Infekterade och Immuna/döda (removed) i en population, vid tiden* t*. En mottaglig kan bli smittad vid kontakt, med intensitet* r*, och en infekterad blir bortflyttad (immun/död, smittar ej längre) med intensitet* a*. En modell är då*

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -rSI\\ \frac{dI}{dt} &= rSI - aI\\ \frac{dR}{dt} &= aI\end{aligned}$$

Modellen antar att populationen är välblandad, alltså att det inte finns några rumsliga skillnader, samt att en infekterad blir smittsam direkt, utan någon inkubationstid. Så som modellen är formulerad så antas sannolikheten att bli smittad bero på hur stor del av populationen som är mottaglig, samt hur stor del som är infekterad.

Olika typer av lösningar

Vi skiljer på tre olika typer av lösningar. Analytiska, numeriska samt stationära.

En **analytisk lösning** kan finnas för enkla högerled $f(N)$, som man kan lösa för hand med kända metoder. De ger ett explicit uttryck för lösningen. Exempelvis har den logisiska ekvationen lösningen

$$N(t) = \frac{kN_0 e^{rt}}{k + N_0(e^{rt} - 1)}$$

och Gompertz ekvationen har lösningen

$$N(t) = ke^{\log\left(\frac{N_0}{k}\right)e^{-rt}}$$

Numeriska lösningar brukar användas då analytisk lösning ej existerar. Det finns numeriska metoder av varierande komplexitet. Ett enkelt exempel är Eulers metod där

$$N'(t) \approx \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = f(N)$$
$$\Rightarrow N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t f(N)$$

men det finns också mer invecklade metoder av högre noggrannhetsordning, exempelvis Runge-Kutta.

En stationär lösning, $N'(t) = 0$, som ger jämviktspunkter för systemet. Exempelvis gäller för den logistiska ekvationen som vi såg tidigare, $N^* = 0$ eller $N^* = k$. Undersök stabilitet.