Optimering

Optimering handlar om att hitta “bästa” lösningen på ett problem, och är vanligt förekommande inom många olika tillämpningsområden. Med bästa avser man ofta

- Minsta/Största
- Snabbaste
- Kortaste
- Mest lönsamma
- Bäst strategin i spel
- ...

I matematiska termer beskrivs detta med hjälp av en funktion f som antingen minimeras eller maximeras:

$$\min_x f(x)$$

För en funktion i en variabel ser problemet typiskt ut som

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

Lokala extrempunkter finner man från kriteriet $f'(x) = 0$, men när x sökes i ett begränsat område (ovanför har vi intervallet $[a, b]$) så kan lösningen också finnas i någon av ändpunkterna. Motsvarande metoder fungerar i högre dimensioner, där gradienten används istället för derivata. Det finns också problem där analytiska metoder inte fungerar och man förlitar sig då på numeriska lösningar.

Exempel 1 (Konservburkens mått)**.** *Vilka mått ska en koservburk med volym V ha, om man vill minimera plåtåtgången?*

Vi antar att plåtburken har formen av en cylinder, med radie r och höjden h. Vi har volumen och arean som ges av de två formlerna

$$V = \pi r^2 h \qquad\qquad A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Vidare har vi $r, h \geq 0$. Vi söker minimum av arean för fix volym, alltså

$$\min_{r,h} A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Eftersom volymen V är fixerad kan vi antingen skriva h i termer av r eller tvärtom, med hjälp av sambandet från volymen. Vi väljer $h = \frac{V}{\pi r^2}$, och erhåller då minimeringsproblemet

$$\min_r A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

för fix V. Vi söker lokala extrempunkter:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$$
$$\Rightarrow r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

Vi undersöker också vad som händer för $r \to 0, \infty$ och ser att

$$\lim_{r\to 0} A(r) = \infty \qquad \lim_{r\to\infty} A(r) = \infty$$

Alltså är $r^* = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$ globalt minimum. Höjden ges av

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi}\left(\frac{2\pi}{V}\right)^{2/3} = 2r^*$$

Alltså är höjden lika med diametern.

Exempel 2 (Huvudkontorets placering)**.** *Placera ett huvudkontor för ett företag så att fågelvägen til dess fabriker minimeras.*

Linjär programmering

Utvecklades huvudsakligen av Leonid Kantrovich, George Dantzig och John von Neumann under 1940-talet.

Exempel 3 (Vaniljbullar och vaniljhjärtan)**.** *Ett bageri vill optimera sin produktion av vaniljbullar och vaniljhjärtan.*

- *Varje bulle kräver 3 msk vaniljkräm och 7.5 min arbete*
- *Varje hjärta kräver 1 msk vaniljkräm och 15 min arbete*
- *Bageriet tjänar 40 öre på en bulle och 30 öre på ett hjärta*

Antag att det finns 120 msk kräm och 10 timmars arbetstid tillgängligt. Hur många av respektive bakverk ska de baka för att maximera förtjänsten? Vi definierar x som *antalet bullar, y antalet hjärtan. Vi får då följande två krav på resurserna*

$$
\begin{aligned}
&3x + y \leq 120 \text{ \textit{(kräm)}} \\
&\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y \leq 10 \text{ \textit{(tid i timmar)}} \\
&x \geq 0,\ \ y \geq 0
\end{aligned}
$$

Målfunktionen som beskriver förtjänst ges av $P(x,y) = 0.4x + 0.3y$. Detta är funktionen vi vill maximera, samtidigt som kraven ovanför är uppfyllda.

Mer allmännt kan ett LP problem skrivas på kanonisk form

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimera } c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\
&\text{Under villkoren} \\
&a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n \geq b_1 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \geq b_n \\
&x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

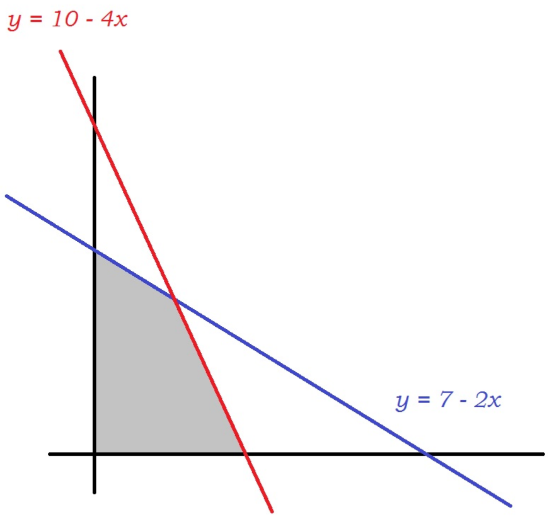
eller ekvivalent på matrisformen

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimera } \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
&\text{Under villkoren} \\
&A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

Med hjälp av villkoren kan man visualisera mängden möjliga lösningar. Största värdet av f antas i något av hörnen! Detta är grunden för den s.k. Simplex-algoritmen utvecklad av George Dantzig på 1940-talet. Beroende på typen av villkort kan mängden möjliga lösningar vara obegränsad, och då kan lösning saknas.

Tilldelningsproblemet

Ett exempel på ett LP problem är tilldelningsproblemet. Antag att man har 4 personer som skall utföra en uppgift vardera, av 4 uppgifter. Om person i utför uppgift j tillkommer en kostnad $c_{i,j}$, som vi skriver i en matris:



$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & 9 \\ 8 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Hur ska uppgifterna fördelas för att minimera kostnaden?

Vi börjar med att införa variabler $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ för de 4 personerna, samt $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ för de 4 uppgifterna, samt matrisen $X = x_{i,j}$ som är 1 om person i gör uppgift j, och annars 0. Bivillkoren ska beskriva att alla uppgifter blir utförda, samt att alla personer utför en uppgift (här antar vi att varje person utför en och endast en uppgift, till 100%, så att man inte delar på uppgifterna). Detta innebär att vi kräver att det finns en 1:a i varje rad/kolonn i matrisen X:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{i,j} = 1 \text{ för varje } i$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i,j} = 1 \text{ för varje } j$$

$$x_{i,j} \geq 0$$

den totala kostnaden ges sedan av

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{44}x_{44}$$

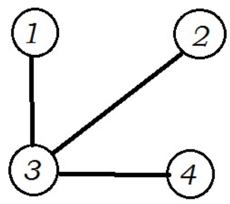
alltså ska vi minimera

$$\min_{x} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{i,j} x_{i,j}$$

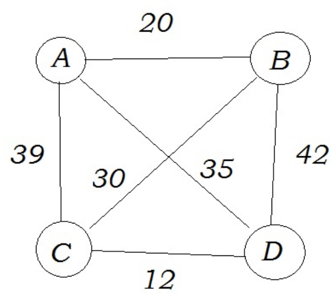
med tillhörande krav ovanför.

Problem på grafer

En graf (nätverk) inom grafteori är ett par (V, E) av noder V (vertices), och bågar E (edges). Exempelvis $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\{1, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}\}$.



Exempel 4 (Handelsresandes problem)**.** *Givet en mängd städer och avstånd mellan dessa städer, vad är den kortaste rutten som besöker alla städer precis en gång och återvänder till startpunkten?*



Exempel 5 (Minimalt uppspännande träd)**.** *Givet en graf G hitta den kortaste delgraf utan cykler (träd) som besöker alla noder.*