MODUL I: FUNKTIONER OCH EKVATIONER
Övningsuppgifter för LGMA65, H17

Innan ni börjar lösa uppgifterna läs noga igenom instruktionerna på kurshemsidan. Notera att uppgift 4,5 och 6 bygger på moment som presenteras på föreläsningen på onsdag. Vänta därför med dessa uppgifter.

1. Det första man tänker på när man möter ett nytt matematiskt uttryck är ofta dess form. Beskriver det någonting kontinuerligt eller diskret, linjärt eller olinjärt? Detta är viktigt ur ett matematiskt perspektiv, men när det kommer till modellering är det viktigare att fundera kring hur ett visst uttryck är kopplat till verkligheten. För varje uttryck i nedanstående lista skall ni diskutera hur det motiveras/rättfärdigas (hur vet vi att det är sant?) och hur bra stämmer det med verkligheten (är det exakt eller bara appoximativt?). Försök också kategorisera uttrycken.

   (a) $a^2 + b^2 = c^2$ (Pythagoras sats)

   (b) aktieindex $= 2045 + 0.0034t$, där t är tiden (finansiell analys)

   (c) population $= Ca^t$, där C och a är konstanter och t är tiden

   (d) $F = Gm_1m_2/r^2$ (gravitationskraften mellan två kroppar)

   (e) $100 \star \mathit{weight} + \mathit{length} < 320$ (max storlek för ett postpaket)

   (f) #presentStudents + #absentStudents = #allStudents (för en klass)

   (g) $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ (den totala elektriska strömmen i en knutpunkt)

   (h) försäkringsrabatt i % = #försäkringar*2 + 0.2* min(7, #år som kund) (lägre pris för bra kunder)

   (i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   (j) $A \geq 0.08LI$ (dimensioneringskrav för 12-voltskablar med ström I längd L och tvärsnittsarea A)

   (k) luftmotstånd $= CAv^2$, där C är en konstant som beror på formen (men inte på storleken), A är tvärsnittsarean och v är hastigheten

   (l) vikt $= Cl^3$, där C är en konstant som är olika för olika objekt och l är längden

   (m) p(krona vid slantsingling) $= 1/2$

2. Lös följande uppgifter i *Mathematica*.

   (a) Beräkna e^{-2}, $\ln(3)$, $\sin(1.1)$, $\sqrt{5}$.

   (b) Anpassa valfri kurva till datapunkterna. Observera att en "korrekt" funktion finns på relativt enkel form.
   `{{0,1},{1,-0.4597},{2,-2.4161},{3,-3.9900},{4,-4.6536},{5,-4.7163}`
   `{6,-5.0398},{7,-6.2461},{8,-8.1455},{9,-9.9111},{10,-10.8391}`
   `{11,-10.9956},{12,-11.1561},{13,-12.0926},{14,-13.8633},{15,-15.7597}}`

   (c) Plotta de två funktionerna $y_1 = x + 3$, samt $y_2 = -x^3 + x$ och använd **Solve** för att hitta deras skärningspunkt.

   (d) Derivera funktionerna $\ln(x)$ och $x^{-1}e^{-x^2}$.

   (e) Beräkna integralen $\int_{-2}^{5} \sin(x)x^2 dx$.

   (f) Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = x^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

   på intervallet $[0, 10]$. Tips: Använd **NDSolve**.

   (g) Generera ett likformigt fördelat slumptal mellan -1 och 2.

3. Under ett experiment med en cykel som färdades i olika hastigheter (v) uppmättes följande bromssträckor (L):

v [km/h]	L [m]
5	0.65
10	1.3
15	2.7
20	5.1
22	5.6
25	7.4
30	10.4

`{{5, 0.65}, {10, 1.3}, {15, 2.7}, {20, 5.1}, {22, 5.6}, {25, 7.4}, {30, 10.4}}`

Ni ska i detta problem anpassa en kurva till ovanstående mätdata.

   (a) Börja med ett enklare exempel och anpassa en andragradskurva till punkterna (1,3) (2,2) (3,4). Vilka ekvationer skall kurvan uppfylla? Lös ekvationssystemet. Vad händer om man lägger till punkten (4,5)?

   (b) Använd nu minstakvadrat-metoden för att anpassa en rät linje till datan i tabellen.

(c) Prova minstakvadrat-metoden med högre ordningens polynom. Vad får ni för resultat? Kan ni teoretiskt motivera ert svar? Kan modellen användas för att göra förutsägelser om framtida mätningar? Vad beror avvikelsen mellan punkterna och kurvan på?

(d) Hitta ett polynom av tillräckligt hög grad som går exakt genom punkterna. Vilken grad behövs och hur ser resultatet ut?

4. På föreläsningen presenterades många olika typer av vetenskapliga modeller (ikoniska, symboliska etc.). Vi införde också begreppen begriplighet och prediktionskraft. I denna uppgifter skall ni placera in följande modeller i ett diagram där axlarna representerar begriplighet och prediktionskraft:

   - Langmuiradsorption
   - Neurala nätverk för vattenavrinning
   - Prediktiva modeller för tidsserier
   - Linjära standardmodellen för celler
   - Lorenzmodellen
   - Nätverksmodeller
   - Musmodeller
   - Skalmodeller för fartyg

   En beskrivning av modellerna hittar ni här. Beskriv hur ni resonerat.

5. Uppskatta hur många liter bensin som förbrukas i Sverige varje år.

6. Använd dimensionsanalys för att hitta en formel för perioden på en pendel. Vilka fysikaliska storheter påverkar dess period, och vilka dimensioner (tid, längd, vikt?) har dessa storheter? Beskriv hur ni kom fram till lösningen. För att bekräfta resultatet ska ni göra ett enkelt experiment. Försök också uppskatta eventuella proportionalitetskonstanter.