Modul III: Dynamiska modeller
Övningsuppgifter för LGMA65, H17

Innan ni börjar lösa uppgifterna läs noga igenom instruktionerna på kurshemsidan.

1. Betrakta följande modell för populationsdynamiken hos valar och krill:

$$\frac{dk}{dt} = (a - bw)k$$
$$\frac{dw}{dt} = (nk - m)w$$

   där k är krillpopulationen, w är valpopulationen och a, b, m, n är positiva konstanter.

   (a) Tolka de olika termerna i ekvationssystemet och betydelsen av de olika konstanterna.

   (b) Formulera Euler-metoden för detta system och lös det för hand i tre tidssteg. Använda parametrar $a = 0.2$, $b = 10^{-4}$, $m = 0.5$ och $n = 10^{-6}$. Låt $k(0) = 7 \times 10^5$ och $w(0) = 3000$, och använd ett tidssteg på $\Delta t = 0.3$ år.

   (c) Använd parametrarna i (b) och lös systemet numeriskt med hjälp av Mathematica (tex. funktionen `NDSolve`). Prova med olika startvärden $k(0), w(0)$ och visualisera med hjälp av `Plot` och `ParametricPlot`. Diskutera era observationer. Hur beror dynamiken på parametervärdena?

   (d) Har systemet några jämviktspunkter? Är de stabila eller instabila? Försök hitta dem analytisk och undersök deras stabilitet med hjälp av numeriska lösningar.

   (e) Undersök effekten av krillfiske i modellen. Vi kan tex. modellera detta med hjälp av en term $-rk$ ($r < a$) i ekvationen för krillen. Prova olika värden på r och diskutera era observationer.

2. Ett läkemedelsföretag vill beräkna lämplig dos och tiden mellan två doser för ett nytt läkemedel. Koncentrationen av läkemedlet i blodet måste hela tiden ligga inom ett givet spann. Ni kan anta att läkemedlet alltid tas med jämna mellan rum. Föreslå ett sätt att modellera detta problem. Bestäm de huvudsakliga delproblemen, och beskriv er lösning. Den skall vara i form av en formel eller algoritm som företaget kan använda sig av.

   Det är upp till er att formulera problemet mer precist, bestämma vilken data ni behöver, och göra rimliga och nödvändiga antaganden.

3. Ni ska modellera ett experiment där en bakteriekultur läggs in på en agarplatta och lämnas isolerad utan att mer näring tillförs. Sätt ihop en enkel och allmän modell som förutsäger bakteriepopulationen, $B(t)$, vid tiden t, givet att $B(0) = B_0$ om den totala näringen vid start är N_0 kalorier. Fokusera på strukturen på modellen och bry er inte om exakta parametervärden. Lös modellen numeriskt för några konkreta begynnelsevärden och ansatta parametrar.

4. En hund som befinner sig på en gräsmatta får plötsligt syn på en katt som rör sig i en rät linje med hastighet v. Hunden börjar springa mot katten med hastighet u och den springer hela tiden rakt mot katten. Beskriv den kurva som hunden rör sig längs då den jagar katten.

5. Denna uppgift handlar om att reflektera kring vad ni lärde er i föregående modul, och är en viktig del i lärandeprocessen. Ni rekommenderas att diskutera era lösningar med övriga studenter, slå i böcker och söka på nätet.

   (a) Deltog ni båda i uppföljningsföreläsningen? Om inte, ge ett rimligt skäl och beskriv vad du gjort för att kompensera detta.

   (b) Byt lösningar med en annan grupp och diskutera och ge varandra feedback. (ej obligatorisk, men rekommenderas)

   (c) Skriv en kort reflektion över förra veckans modul. Vad lärde ni er då ni jämförde era egna lösningar med de som gavs på uppföljningsföreläsningen? Fundera kring er problemlösningsstrategi. Vad var svårt och varför? Hur kan ni förbättra era lösningar? Svara kort och koncist.