

Tentamen i ANALYS, fördjupning för gymnasielärare, LLMA60 och MMGL61

11 januari 2013, kl 08.30–12.30

Hjälpmedel: inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.

Telefonvakt: Anders Martinsson, 0703-088304

För godkänt krävs minst 30 poäng, för väl godkänt minst 45 poäng. Bonuspoäng från hösten 2012 ingår. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida:

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/LLMA60/H12/

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

1. Beräkna gränsvärdena

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x}, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 5}{|13x - 11|}. \quad (6p)$$

2. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Ange speciellt inflektionspunkterna. (8p)

3. Beräkna följande integraler

$$(a) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx, \quad (b) \quad \int e^{\sqrt{x}} \, dx. \quad (8p)$$

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + 2xy - x = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. (7p)

5. Beräkna längden av kurvbågen $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. (8p)

6. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = (x^2 - 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$. (8p)

7. Beräkna integralen $\iint_D (x+1)(y-2) \, dA$, där D är området $x^2 + y^2 \leq 9$. (8p)

8. Beräkna

$$\frac{d^{2013}}{dx^{2013}} \sin 2x. \quad (7p)$$

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^s$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos s$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos s$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+s^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+s)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+s)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är s ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$