MATEMATIK
Göteborgs universitet
SK

28 oktober 2002, kl 8.45 – 13.45
Hjälpmedel: miniräknare
Telefon: Johanna Pejlare, 0740-350646

LMA100. Övningstentamen 1 i Diskret matematik

Lösningsförslag

1. Eftersom $3|(a+1)$ har vi att $a+1=3k$ för något heltal k, dvs. $a=3k-1$. Så är $a^2-a-2=(3k-1)^2-(3k-1)-2=9k^2-9k=9k(k-1)$ som visar att $9|(a^2-a-2)$. (I princip kan vi visa mer, nämligen att $18|(a^2-a-2)$ eftersom ett av talen k, $(k-1)$ måster vara jämnt, dvs. $k(k-1)=2\ell$ för något heltal ℓ, därför $a^2-a-2=18\ell$.)

2. För $n=1$ är $VL=-3$ och $HL=\frac{2+3-23}{6}=-3$. Påståendet är alltså sant för $n=1$.

   Antag nu att påståendet är sant för något n-värde, säg $n=p$. Då gäller alltså $VL_p=\sum_{k=1}^{p}(k+2)(k-2)=\dfrac{2p^3+3p^2-23p}{6}=HL_p$. I så fall blir för $n=p+1$:

   $$VL_{p+1}=\sum_{k=1}^{p+1}(k+2)(k-2)=VL_p+(p+3)(p-1)=HL_p+(p+3)(p-1)=$$
   $$\tfrac{2p^3+3p^2-23p}{6}+(p+3)(p-1)=\tfrac{2p^3+3p^2-23p+6(p+3)(p-1)}{6}=\tfrac{2p^3+9p^2-11p-18}{6},$$

   medan

   $$HL_{p+1}=\frac{2(p+1)^3+3(p+1)^2-23(p+1)}{6}=\frac{2p^3+9p^2-11p-18}{6},$$

   dvs. $VL_{p+1}=HL_{p+1}$. Vi har alltså visat att om påståendet är sant för $n=p$, så är det också sant för $n=p+1$. Induktionsprincipen ger att påståendet är sant för alla heltal $n\geq 1$.

3. Karakteristisk ekvation

   $$\lambda^2=\lambda+2 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow$$
   $$\lambda=2 \text{ eller } \lambda=-1.$$

   Alltså $a_n=a\cdot 2^n+b\cdot(-1)^n$.

   Vi kan nu bestäma a och b:

   $$\begin{cases} -1=a_0=a+b \\ 4=a_1=2a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

   så $a_n=2^n-2\cdot(-1)^n$ eller $a_n=2^n+2\cdot(-1)^{n+1}$.

4. Hammingsavståndet mellan vektorerna $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ och $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ är talet $d(a, b) =$ antalet i sådana att $a_i \neq b_i$. Så är $d((1100101), (0110110)) = 4$.

5. Om talet a är jämnt och dess siffersumma är delbar med 3, så är a delbart med 6. Om de tre sista siffrorna av ett tal b är ett tal delbart med 8 och siffersumman av b är delbar med 3, så är b delbart med $3 \cdot 8 = 24$.

6. Arbetsgruppen kan innehålla 2,3 eller 4 kvinnor. I det första fallet kan kvinnorna utväljas på $\binom{4}{2}$ sätt, och de båda männen kan, oberoende av hur kvinnorna valdes, utses på $\binom{8}{2}$ sätt. Antalet tänkbara arbetsgrupper med 2 kvinnor är då enligt multiplikationsprincipen $\binom{4}{2}\binom{8}{2}$. På analogt sätt hanteras fallen med 3 och 4 kvinnor. Totala antalet sätt blir

$$\binom{4}{2}\binom{8}{2} + \binom{4}{3}\binom{8}{1} + \binom{4}{4}\binom{8}{0} = 6 \cdot 28 + 4 \cdot 8 + 1 \cdot 1 = 201.$$

7. Att välja ut en delmängd på k element ur grundmängden av n element kan ju ske på $\binom{n}{k}$ sätt. Men hur man väljer ut en delmängd kan man ju lika gärna beskriva genom att man talar om vilka element som *inte* tas med i delmängden, dvs. genom att man beskriver *komplementet*. Men komplementet skall ju ha $n - k$ element och kan alltså se ut på $\binom{n}{n-k}$ sätt, vilket bevisar $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

8. En graf är sammanhängande om det finns en väg mellan varje par av noder. Grafen som svarar mot förbindelse-matrisen A är inte sammanhängande eftersom det finns ingen väg mellan t.ex. noderna 1 och 3.