LMA100. Övningstentamen 2 i Diskret matematik

Lösningsförslag

1. Eftersom $5|(a-3)$ har vi att $a-3=5k$ för något heltal k. Så är $a^2+1=(a^2-6a+9)+6a-8=(a-3)^2+5a+(a-3)-5=(5k)^2+5a+5k-5=5(5k^2+a+k-1)$ som visar att $5|(a^2+1)$.

2. Låt $a = 12201010101010101$. Siffersumman av a är 12 som är delbar med 3 men inte är delbar med 9, därför a är delbart med 3 men inte är delbart med 9. De två sista siffrorna är ett tal 01 som inte är delbart med 4, alltså är inte a delbart med 4. Till sist $1-2+2-0+1-0+1-0+1-0+1-0+1-0+1-0+1=7$ som inte är delbart med 11, alltså är inte a delbart med 11.

3. Karakteristisk ekvation

$$\lambda^2 = 2\lambda + 3 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda = 3 \text{ eller } \lambda = -1.$$

   Alltså $a_n = a\cdot 3^n + b\cdot(-1)^n$.

   Vi kan nu bestäma a och b:

$$\begin{cases} 2 = a_0 = a+b \\ 2 = a_1 = 3a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

   så $a_n = 3^n + (-1)^n$.

4. a) $\frac{7!}{2!2!} = 1260$ eftersom vi har 2A och 2N. b) Dela upp i fall:

   I. 2A, 2N: $\binom{5}{2}$ sätt att placera de 2A:na, sedan $\binom{3}{2}$ sätt att placera de 2N:na, till sist val mellan J, O, och H. Alltså $\binom{5}{2}\binom{3}{2}\cdot 3 = 90$.

   II. 2A, $\leq$1N: $\binom{5}{2}$ sätt att placera de 2 A:na, sedan $P(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 4!$ sätt att i ordning välja 3 av J, O, H, och N; alltså $\binom{5}{2}\cdot 4! = 240$.

   III. $\leq$1A, 2N: Samma sak som i II. Alltså 240.

   IV. 1A, 1N: Vi måste ha varje bokstav av J, O, och H, alltså $5! = 120$.

   Totalt $90 + 2\cdot 240 + 120 = 690$.

5. Fibonacciföljeden F_n definieras så här $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_1 = F_2 = 1$. Vi viser att (F_n) uppfyller likheten $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ med matematisk induktion.

   För $n = 1$ är $VL = 1^2 = 1$ och $HL = 1 \cdot 1 = 1$. Påståendet är alltså sant för $n = 1$.

   Antag nu att påståendet är sant för något heltal n. Då gäller alltså $VL_n = F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1} = HL_n$. I så fall blir för $n + 1$:

$$\begin{aligned} VL_{n+1} = F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 + F_{n+1}^2 \quad &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2, \\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1} F_{n+2} = HL_{n+1}. \end{aligned}$$

   Vi har alltså visat att om påståendet är sant för n, så är det också sant för $n + 1$. Induktionsprincipen ger att påståendet är sant för alla heltal $n \geq 1$.

6. I $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ kan vi notera att vänsterledet betyder antalet delmängder med k element i en grundmängd av $n + 1$ element. Nu väljer vi ut ett fixt, bestämt element av de $n+1$ och "sätter ett märke på det". Delmängderna med k element faller nu i två kategorier: de som innehåller det märkta element, och de som inte gör det. De senare skall väljas som delmängder bland de omärka elementen, vilka är n stycken, så det finns tydligen $\binom{n}{k}$ sådana delmängder. De förra, som innehåller det märkta element, skall dessutom innehålla precis $k - 1$ element utvalda bland de n omärkta, dvs. det finns $\binom{n}{k-1}$ möjligheter för sådana delmängder. Tillsammans ger detta nu att formeln $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ gäller.

7. Man säger att en kod är linjär eller en gruppkod om summan av två godtyckliga kodoord är ett kodord. Till exempel $C = \{000, 010, 101, 111\}$ är en binär linjär kod. Ett exempel till skulle kunna vara $C = \{00000000, 11111111\}$.

8. Hamiltonväg (Hamiltoncykel) är en väg (en cykel) som passerar varje nod precis en gång.