LMA100 Diskret matematik 19 aug 02

1. Det finns inga speciella platser i en sådan ring, men så snart en person placerats får övriga 15 bestämda platser i förhållande till denna. Alltså:

   a) $15!$

   b) Utgå från den ene mannen; den andre har då 13 platser att välja på och övriga 14 kan placeras godtyckligt; alltså $13 \cdot 14!$

   c) Här blir det varannan man, varannan kvinna. Utgå t.ex. från en man; det finns då $7!$ sätt att placera övriga män och $8!$ sätt att placera kvinnorna, totalt $7! \cdot 8!$

   d) När männen är placerade är ~~också~~ kvinnorna det; $7!$

2. a) $\dfrac{8!}{2!\,2!}$ (Vi har 2A, 2S och 4 övriga bokstäver.)

   b) 2A, 2S och 1 annan : $4 \cdot \dfrac{5!}{2!\,2!} = \binom{5}{2}\binom{3}{2} \cdot 4 = 120$

   2A, ≤ 1S : $\binom{5}{3} \cdot \dfrac{5!}{2!} = \binom{5}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 600$

   ≤ 1A, 2S : 600

   ≤ 1A, ≤ 1S : $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$

   2040

3. $$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} =$$

   $$= \frac{(n+1)\,(2n)!}{n!\,(n+1)!} - \frac{n \cdot (2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} =$$

   $$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!} \quad (a) \qquad \text{och} \qquad = \frac{1}{n} \cdot \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} \quad (b)$$

4. Om behållningen den 2 januari efter n år är x_n så gäller $x_0 = 10000$ och $x_n = 1.03\,x_{n-1} - 500$ då $n > 0$. Upprepad användning av detta ger $x_{30} = 484.92$ och $x_{31} = -0.54$ så man kan hålla på i 31 år (om man ger banken en 50-öring sista året).

   = Mera "vetenskapligt" är att ta fram en formel för x_n:

   $x_1 = 1.03 \cdot x_0 - 500$

   $x_2 = 1.03\,x_1 - 500 = 1.03^2 x_0 - 1.03 \cdot 500 - 500$

   $x_3 = 1.03\,x_2 - 500 = 1.03^3 x_0 - 1.03^2 \cdot 500 - 1.03 \cdot 500 - 500$

   $$x_n = 1.03^n x_0 - 500(1.03^{n-1} + 1.03^{n-2} + \ldots + 1.03^2 + 1.03 + 1)$$

   $$= 1.03^n \cdot 10000 - 500 \cdot \frac{1.03^n - 1}{1.03 - 1} = 1.03^n \cdot 10000 - \frac{500}{0.03} \cdot 1.03^n + \frac{500}{0.03} =$$

   $$= \frac{50000}{3} - 1.03^n\left(\frac{50000}{3} - 10000\right) = \frac{50000 - 1.03^n\,20000}{3} =$$

   $$= \frac{20000}{3}\left(2.5 - 1.03^n\right)$$

   Så vi söker det största n för vilket ~~detta~~ fortfarande är positivt; $1.03^n < 2.5 \iff n < \dfrac{\ln 2.5}{\ln 1.03} = 30.9989$

5. a) $F_1 = F_2 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \ge 3$.

   b) I. $VL_1 = F_1 = 1 \quad HL_1 = F_2 = 1 = VL_1$

   II. Om $VL_n = HL_n$ för ett visst n så

   $VL_{n+1} = VL_n + F_{2n+1} = HL_n + F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2} = HL_{n+1}$

   III. Visat enl. induktionsprincipen

   c) I. $VL_1 = F_2 = 1 \quad HL_1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1 = VL_1$

   II. Om $VL_n = HL_n$ för ett visst n så

   $VL_{n+1} = VL_n + F_{2n+2} = HL_n + F_{2n+2} = F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} =$

   $= F_{2n+1} + F_{2n+2} - 1 = F_{2n+3} - 1 = HL_{n+1}$

   III. Visat enl. induktionsprincipen.

6. ~~Barnett~~ s. 212 (avstånd), 213 (min. avstånd), 218 (satsen), 217 (linjär).

7. a) Infobitarna kan väljas fritt; sedan är kontrollbitarna bestämda, så 3 val med 2 alternativ ger $2^3 = 8$ kodord.

   b) Till varje kodord finns 6 ord med avstånd exakt 1 (ändra på 1 plats) och då kodens minimiavstånd är minst 3 eftersom matrisens kolonner är olika och skilda från $\bar{0}$ hör varje sådant ord till exakt ett kodord så det finns $6 \cdot 8 = 48$ sådana ord.

   c) Det finns $2^6 = 64$ binära ord så det finns $64 - 8 - 48 = 8$ ord med avstånd större än 1 till varje kodord.