HT02
LMA100: Diskret Matematik
Göteborgs universitet
SK

Vi jobbar vidare med grafteorin.

Graffärgning och Kromatiskt tal.

Med en *färning* av en graf menas ett sätt att tilldela färger till grafens noder, så att två noder som förbinds av en kant får olika färg. Ett klassiskt problem inom grafteorin, som löstes 1976 av Appel och Haken, är att visa att varje planär graf har en färgning som bara använder fyra färger. Detta är känt som *fyrfärgssatsen.*

Övning: Ge ett exempel av planär graph som inte kan färgas i 3 färger.

Varje loopfri graf kan färgas, om inte annat genom att man ger varje nod en egen färg. Graffärgningsproblem handlar ofta om att avgöra hur många färger som behövs för att färga en graf. Det minsta antalet färger som möjliggör en färning av en graf G kallas det *kromatiska talet* för G och betecknas $\chi(G)$. Fyrfärgssatsen säger alltså att om G är en planär loopfri graf, så är $\chi(G) \leq 4$.

Övning: Bestäm $\chi(K_n)$, och $\chi(K_{m,n})$.

Sats. *Om noderna i en graf kan ordnas $v_1, v_2, \ldots, v_n$ så att varje nod v_i har färre än k grannar bland de föregående noderna $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$, så kan grafen färgas med k färger.*

Bevis. Vi kan färga noderna en efter en i den givna ordningen, och i varje steg välja en färg som inte tidigare har använts för någon av dess grannar. Eftersom högst $k-1$ färger kan vara upptagna, och det finns k färger tillgängliga, kan vi aldrig köra fast.

Uppgifter ur Vretblad:

Avsnitt	**Uppgift**
5.7	5.33 (Tänk på totala antalet kantändar i grafen för att se att $\sum_{v\in V(G)} deg(v) = 2\lvert E(G)\rvert$; konkludera nu det som behövs);
	5.34–5.36
5.8	5.39

Ytterligare övningar:

1. Bestäm en Hamiltoncykel i grafen Q_3 (def. ges på s. 128 i Vretblad).

2. Visa att G är ett träd *omm* det finns en unik stig mellan varje par av noder.

3. Låt G vara en bipartit graf med ett udda antal noder. Visa att G inte kan ha en Hamiltoncykel. Ge ett kort men klart bevis!

4. Låt G vara en ändlig riktad graf som är *acyklisk*, d.v.s. som inte har någon riktad cykel. Visa att G har en *källa*, d.v.s. en nod med inga kanter riktade *till* sig. Visa att G även har en *sänka*, d.v.s. en nod med inga kanter riktade från sig.

5. Låt G vara en ändlig riktad graf där varje nod kar någon kant riktad från sig. Visa att G har en cykel. Gäller detta om grafen inte behöver vara ändlig? Om svaret är ja, ge bevis, men beskriv annars ett motexempel.

6. Är det möjligt att följande listor är graderna av alla noder i en graf? Om så fallet, rita en representant för grafen.

a) 2, 2, 2, 3.
b) 1, 2, 2, 3, 4.
c) 2, 2, 4, 4, 4, 4.
d) 1, 2, 3, 4.

7. G är en lop-fri oriktad graf med åtminstone en sida. Visa att G är bipartit om och endast om $\chi(G) = 2$.

8. *Komplementet* till G är grafen med samma noder som G men där två noder är grannar om och endast om de inte är det i G. Bevisa att om G är en osammanhängande graf, då är komplementet till G sammanhängande. Faktum är att i så fall finns det en väg av längd högst två mellan varje par av noder i komplementet.

Omvändningen gäller inte, d.v.s. det finns grafer som är sammanhängande och har sammanhängande komplement. Ge ett exempel av sådan graf med 4 noder.