HT02
LMA100: Diskret Matematik
Göteborgs universitet
SK

**Repetition**

Vi förbereder oss för övningstenta (som skall vara den 28 oktober) genom att lösa följande övningar och svara på teoretiska frågorna.

# 1 Grundläggande talteori

## 1.1 Frågor om teori

**1.** Låt $a$ och $b$ vara heltal. Vad betyder uttrycket "$a$ delar $b$"?

**2.** Bevisa att om $a$, $b$, $c$ är heltal

a) samt $a|b$ och $a|c$, så gäller $a|(b+c)$;

b) och $a|b$, så gäller $a|bc$.

("$x|y$" betyder att $x$ delar $y$, eller, som är samma sak, $y$ är delbart med $x$)

**3.** Definiera begreppet primtal.

**4.** Formulera delbarthetstest för talen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13.

## 1.2 Övningar

**Övning 1.** Visa att $n^2 + 3n$ är delbart med 2 för alla $n \geq 0$.

**Övning 2.** Visa att om $3|(a-1)$ så är $3|(a^2+5)$.

**Övning 3.** Visa att om $2|(a-3)$ så är $6|(3a^2-9)$.

# 2 Matematisk induktion

**Övning 4.** Bevisa med matematisk induktion att för $n = 1, 2, 3, ...$ gäller $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$.

**Övning 5.** Bevisa med matematisk induktion att $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, för alla heltal $n \geq 1$.

**Övning 6.** Bevisa att $3^n > n^3$ för $n \geq 4$.

**Övning 7.** Bestäm det minsta positiva heltalet $n$ för vilket olikheten $2^n > (n^2+1)$ gäller och visa olikheten med induktion från och med det talet.

**Övning 8.** Visa med hjälp av induktion att $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-1) = \dfrac{2n^3+3n^2-5n}{6}$, för alla $n \geq 1$.

# 3 Kombinatorik

## 3.1 Frågor om teori

**5.** Formulera multiplikationsprincipen. (*Om fösta beslut innebär ett val mellan $n_1$ alternativ, andra beslut innebär ett val mellan $n_2$ alternativ, osv, och beslutet skall fattas $m$ gånger i följd, oberooende av varandra, så finns det $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m$ möjliga beslutsföljder.*)

**6.** Vad är permutationer? (*Ur en mängd (grundmängd) av $n$ olika objekt (föremål) skall man utvälja en delmängd av $k$ objekt, som skall uppräknas i en viss ordningsföljd. En sådan ordnad delmängd kallas en permutation av $k$ element ur $n$ givna.*)

**7.** Hur många permutationer av $k$ olika objekt valda bland $n$ givna finns det? (Svar: $P(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.)

**8.** Vad är kombinationer? (*Vi väljer ut $k$ element bland $n$ givna, men nu bortser vi från ordninigen mellan de valda elementen. Detta kallar man för att välja ut en kombination av $k$ element ur de $n$ givna. En kombination kan även helt enkelt ses som en delmängd av den givna grundmängden.*)

**9.** Hur många olika kombinationer av $k$ element ur de $n$ givna finns det? (Svar: $\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.)

**10.** Formulera Dirichlets lådprincip. (*Om $n+1$ föremål skall fördelas på $n$ fack, måste minst ett fack komma att innehålla mer än ett föremål.*)

**11.** Formulera Binomialsatsen. *Om $n$ är ett naturligt tal, så gäller*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

**12.** Skriv upp några första rader i Pascals triangel.

**13.** Vilka formler använder vi för att bygga Pascals triangel? (Svar: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ och $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, där $1 \leq k \leq n$.)

## 3.2 Övningar

**Övning 9.** Hur många "ord" med 10 (svenska) bokstäver finns det? Hur många där de första och sista bokstäverna är olika.

**Övning 10.** Givet är de 7 bokstäverna i ordet APPARAT. Hur många olika "ord" (=bokstavspermutationer) kan man bilda av dem med

a) 7 bokstäver?

b) 5 bokstäver?

**Övning 11.** Hur många 6-bokstaviga "ord" kan man bilda ur ordet PASCAL? Hur många 4-bokstaviga ur det?

**Övning 12.** Hur många sjusiffriga tal finns det som innehåler siffrorna 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3?

**Övning 13.** Om alla 6-bokstaviga "ord" som kan bildas ur ordet FLICKA ordnas i bokstavsordning, vilket ord kommer

a) föst

b) sist

c) på plats 5?

**Övning 14.** Visa kombinatoriskt att

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}+\ldots+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

för $0 \leq k \leq m, n$.
Visa med hälp av detta att

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2.$$

**Övning 15.** I en förening med 15 medlemmar skall väljas en styrelse bestående av ordförande, kassör och två övriga ledamöter.

a) Hur många olika styrelser är möjliga?

b) Om föreningen består av 7 damer och 8 herrar och styrelsen skall bestå av 2 damer och 2 herrar samt ordförande och kassör skall vara av olika kön, hur många styrelser är då möjliga?

**Övning 16.** Definiera Fibonacciföljeden $(F_n)$. Visa att $(F_n)$ uppfyller likheten

a) $F_1 - F_2 + F_3 - F_1 + \cdots + F_{2n-1} - F_{2n} = 1 - F_{2n-1}$;

b) $F_1 - F_2 + F_3 - F_1 + \cdots - F_{2n} + F_{2n+1} = 1 + F_{2n}$.

*Ledning.* (a) visas lämplingen med induktion; (b) kan enkelt visas ur resultatet i (a) eller direkt med induktion.

**Övning 17.** Utveckla $(2x + y^3)^4$. Bestäm koefficienten för $x^{16}$ i utvecklingen av $(2 + x^2)^{18}$.

**Övning 18.** Ur en församling på 4 danskar, 6 norrmän och 9 svenskar skall väljas en kommitté på 5 personer så att alla 3 nationerna är representerade. På hur många sätt kan det göras?

**Övning 19.** Åtta personer, A, B, C, D, E, F, G och H, skall placeras runt ett kvadratiskt bord med plats för två personer vid varje sida.

a) Hur många placeringar är möjliga om det inte spelar någon roll vid vilken sida av bordet man sitter men däremot huruvida man har höger- eller vänsterplatsen vid en sida?

b) Hur många om dessutom A och B inte skall sitta intill varandra?

**Övning 20.** a) Definiera Fibonacciföljden $(F_n)$.

b) Använd Fibonacciföljdens definierande relation för att visa att (för $n \geq 5$)

$$\begin{aligned} F_n &= 2F_{n-2} + F_{n-3} \\ &= 3F_{n-3} + 2F_{n-4} \\ &= 5F_{n-4} + 3F_{n-5} \end{aligned}$$

c) Visa allmänt $F_n = F_{k+1}F_{n-k} + F_kF_{n-k-1}$ för $0 \leq k \leq n-1$.

# 4 Iteration och rekursion

**Övning 21.** Lös differensekvationen $3x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 3$.

**Övning 22.** Lös differensekvationen $4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$, $n \geq 0$; $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

**Övning 23.** Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n \\ y_0 = y_1 = 1 \end{cases}$$

**Övning 24.** Bestäm ett explicit uttryck för $a_n$, $n \geq 0$, då

a) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, samt $a_0 = 2$ och $a_1 = 1$;

b) $a_n = 2a_{n-1} + 2$, samt $a_0 = 1$.

# 5 Felrättande koder

## 5.1 Frågor om teori

**14.** Vad menar man med en binär kod? (*Med en binär kod menar man en godtycklig delmängd* $C$ *till* $Z_2^n$, *där* $Z_2^n$ *är mängden av alla binära vektorer av längden* $n$, *dvs.* $Z_2^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \{0, 1\}\}$.)

**15.** Vad är Hammingsavståndet mellan vektorerna $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ och $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$? (*Det är talet* $d(a, b) =$ *antalet* $i$ *sådana att* $a_i \neq b_i$.)

**16.** Vad är minimiavståndet $d(C)$ av en kod $C$? ($d(C)$ *är det minsta avståndet mellan två olika kodord i* $C$, *dvs.* $d(C) = \min d(a, b)$ *då* $a, b \in C$ *och* $a \neq b$.)

**17.** Vad menas med vikten $w(a)$ av en vektor $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$? ($w(a) =$ *antalet* $i$ *sådana att* $a_i \neq 0$.)

**18.** Vad menas med vikten $w(C)$ av en kod $C$? (*Med vikten av en kod* $C$ *menar man den minsta vikten av nollskillda kodord dvs.* $w(C) = \min w(a)$ *då* $a \neq 0$.)

**19.** Vilken kod kallas för lihjär (gruppkod)? (*Man säger att en kod är linjär eller en gruppkod om summan av två godtyckliga kodoord är ett kodord.*)

**20.** När säger man att en kod $C$ detekterar (korrigerar) $t$ fel? (*Man säger att en kod* $C$ *detekterar* $t$ *fel om* $d(C) > t$. *Man säger att den korrigerar* $t$ *fel om* $d(C) > 2t$.)

## 5.2 Övningar

**Övning 25.** Låt koden $C = \{(000000), (010101), (101010), (111111)\}$. Avkoda de mottagna orden:

a) 110101

b) 100100

**Övning 26.** Visa att den binära koden med de 4 kodorden 00000000, 11111000, 00011111, 11100111 rättar 2 fel. Om man i stället använder koden för felupptäckande, hur många fel upptäcker den koden?

**Övning 27.** Konstruera (dvs. ange matrisen för) Hammingkoden med 7 informationsbitar.

a) Vilket kodord får man om informationsbitarna är 1010011?

b) Avkoda de mottagna orden

   i. 11111111111
   ii. 10101010101
   iii. 11110000010

# 6 Grafteorin

## 6.1 Frågor om teori

**21.** Vad är en graf? (*En graf är ett par av mängder, $V$ och $E$, där $E$ består av 2-elements delmängder i $V$.*

**22.** Vad är en riktad graf? (*En riktad graf är ett par av mängder, $V$ och $E$, där $E \subseteq V \times V$.*)

**23.** Definiera komplementet till en graf $G$. (*Komplementet till $G$ är grafen med samma noder som $G$ men där två noder är grannar om och endast om de inte är det i $G$.*)

**24.** Vad kallas för graden av en nod $v$ i en graf $G$? Vad är en isolerade nod? (*Antalet kanter i $G$ som går igenom $v$ kallas för graden av $v$ och betecknas $deg(v)$. En isolerade nod är en nod som har graden noll.*)

**25.** Rita den riktade grafen som svarar mot förbindesmatrisen (the adjacency matrix) $A$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**26.** Ge 3 olika exempel av en bipartite graf.

**27.** Vad är en väg i en graf $G$? (*En väg i en graf $G$ är en följd $x_1, x_2, \ldots, x_k$ av noder i $G$ så att $(x_i, x_{i+1})$ är en kant för varje $i < k$ (och $k \geq 2$).* Eller: *En följd av kanter i en graf som hänger ihop efter varandra så att man kan vandra längs dem kallas för en väg.*)

**28.** Vad är en väg utan upprepning? (*En väg utan upprepning är en väg som innehåler varje kant högst en gång.*)

**29.** Vad är en cykel (en Eulercykel)? (*En väg utan upprepning (med minst en kant) kallas en cykel om den leder från en nod $n$ tillbaka till $n$. En cykel som innehåller alla kanter i grafen kallas för en Eulersk cykel.*)

**30.** Vad är Hamiltonväg (Hamiltoncykel)? (*Det är en väg (en cykel) som passerar varje nod precis en gång.*)

**31.** Vilken graf kallas för sammanhängande? (*En graf är sammanhängande om det finns en väg mellan varje par av noder.*)

**32.** När en sammanhängande graf $G$ utan isolera noder innehåler en Eulercykel? (*Sådan graf innehåler en Eulercykel om och endast om alla noder i $G$ har jämnt gradtal.*)

**33.** Antag att $G$ är en sammanhängande graf utan isolera noder, och låt $a$ och $b$ vara två noder i $G$. När gäller att det finns en Eulerväg genom $G$ med start i $a$ och mål i $b$? (*Om och endast om graderna av a och b är udda och alla andra noder i G har jämn grad.*)

**34.** Vad menas med en "färning" ("färgläggning") av en graf? (*Med en färning av en graf menas ett sätt att tilldela färger till grafens noder, så att två noder som förbinds av en kant får olika färg.*)

**35.** Vad är "kromatiska talet" för en graf $G$? (*Det minsta antalet färger som möjliggör en färning av en graf G kallas det kromatiska talet för G och betecknas* $\chi(G)$.)

## 6.2 Övningar

Se uppgifterna till 14 och 18 oktober för att förbereda sig till tentamenskrivningen.

**Lösningsförslag till utvalda uppgifter**

# Grundläggande talteori

**1.** $n^2 + 3n = n(n+3)$. Om $n$ är udda så är $n+3$ jämnt och om $n$ är jämnt är $n+3$ udda. I båda fall blir produkten jämn.

**2.** Eftersom $3|(a-1)$ har vi att $(a-1) = 3k$ för ngt heltal $k$. Så är $a^2+5 = (a^2-1)+6 = (a-1)(a+1)+6 = 3k(a+1)+3\cdot 2 = 3\cdot(k(a+1)+2)$ som visar att $3|(a^2+5)$.

**3.** $3a^2 - 9$ är delbart med 3, eftersom $3a^2 - 9 = 3(a^2 - 3)$. Det är nu räcker att visa att $3a^2 - 9$ är delbart med 2. $2|(a-3)$, därför $(a-3) = 2k$ för ngt $k$, dvs. $a = 2k+3$. Så är $3a^2 - 9 = 3(2k+3)^2 - 9 = 3(4k^2+12k+9) - 9 = 12k(k+3) + 18 = 2(6k(k+3)+9)$ som visar att $3a^2 - 9$ är delbart med 2.

# Matematisk induktion

**4.** För $n = 1$ är $VL = 1$ och $HL = \frac{1}{6}(2+3+1) = 1$. Påståendet är alltså sant för $n = 1$.

Antag nu att påståendet är sant för något $n$-värde, säg $n = p$. Då gäller alltså $VL_p = \sum_{k=1}^{p} k^2 = \dfrac{1}{6}(2p^3 + 3p^2 + p) = HL_p$ (induktionsantagandet). I så fall blir för $n = p + 1$:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} k^2 = VL_p + (p+1)^2 = HL_p + (p+1)^2 =$$
$$\tfrac{1}{6}(2p^3 + 3p^2 + p) + (p+1)^2 = \tfrac{1}{6}(2p^3 + 9p^2 + 13p + 6),$$

medan

$$HL_{p+1} = \frac{1}{6}(2(p+1)^3 + 3(p+1)^2 + (p+1)) = \frac{1}{6}(2p^3 + 9p^2 + 13p + 6),$$

dvs. $VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Vi har alltså visat att om påståendet är sant för $n = p$, så är det också sant för $n = p + 1$. Induktionsprincipen ger att påståendet är sant för alla heltal $n \geq 1$.

**6.** För $n = 4$ är $VL = 3^4 = 81$, $HL = 4^3 = 64$. Eftersom $81 > 64$, är påståendet sant för $n = 4$.

Antag nu att påståendet är sant för något $n = p$, där vi kan anta att $p \geq 4$; vi antar alltså att vi vet att $3^p > p^3$. I så fall blir

$$VL_{p+1} - HL_{p+1} = 3^{p+1} - (p+1)^3 =$$
$$3 \cdot \mathbf{3^p} - p^3 - 3p^2 - 3p - 1 > 3 \cdot \mathbf{p^3} - p^3 - 3p^2 - 3p - 1 =$$
$$2\mathbf{p^3} - 3p^2 - 3p - 1 \geq_{(\text{vi använder } p \geq 4)} 2 \cdot \mathbf{4p^2} - 3p^2 - 3p - 1 =$$
$$5p^2 - 3p - 1 > 5p - 3p - 1 = 2p - 1 > 0.$$

Under förutsättning att påståendet gäller för ett $p$ (som är $\geq 4$), så gäller det tydligen också för $n = p + 1$. På grund av induktionsprincipen är påståendet sant för alla $n \geq 4$.

# Kombinatorik

**9.** Totalt finns det $29^{10}$ ord. Om sista bokstav skiljar sig från den första, har vi $28 \cdot 29^9$ ord.

**10.** a) $\frac{7!}{3!2!} = 420$ eftersom vi har 3A och 2P. b) Dela upp i fall:

I. 3A, 2P: $\frac{5!}{3!2!} = 10$.

II. 3A, $\leq$1P: $\binom{5}{3}$ sätt att placera de 3 A:na, sedan $3 \cdot 2$ sätt att i ordning välja 2 av P, R, T; alltså $\binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 60$. *Eller*: $\binom{3}{2}$ sätt att välja 2 av P, R, T. Sedan $\frac{5!}{3!}$ att ordna våra 5 bokstäver, av vilka 3 är A och övriga är olika.

III. 2A, 2P: $\binom{5}{2}$ sätt att placera A:na, sedan $\binom{3}{2}$ sätt att placera P:na, till sist val mellan R och T; alltså $\binom{5}{2}\binom{3}{2} \cdot 2 = 60$. *Eller*: 2 sätt att välja R eller T, $\frac{5!}{2!2!}$ sätt att ordna bokstäverna.

IV. 2A, P, R, T: $\binom{5}{2} \cdot 3!$ eller $\frac{5!}{2!} = 60$.

V. A, 2P, R, T: som IV 60.

Totalt $10 + 4 \cdot 60 = 250$.

**12.** Siffran 0 får inte komma på talets fösta plats, därför kan vi välja den fösta siffran bland de andra 6 siffrorna. Den andra siffran väljas bland 6 siffror som är kvar, den tredje siffran bland 5 siffror som är kvar osv. Då har vi $6 \cdot 6!$ möjligheter. Men det finns repetition av siffror, alltså blir svaret $\frac{6 \cdot 6!}{3!2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$.

**13.** Svar: a) ACFIKL b) LKIFCA c) ACFLIK

**14.** Först visar vi den första likheten.

Vi skall i VL välja $k$ objekt bland $(m+n)$ givna. Kalla $m$ av dem blå, $n$ stycken röda. Vi kan då välja 0 blå och $k$ röda, 1 blått och $(k-1)$ röda, 2 blå och $(k-2)$ röda, ... , $(k-1)$ blå och 1 rött eller $k$ blå och 0 röda, vilket kan göras på det antalet sätt som HL anger.

Med $k = m = n$ ger fösta påstående

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0},$$

och HL här är lika med påståendets HL eftersom $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$ för $0 \le r \le n$.

**15.** Vi kan räkna på två sätt:

$$15 \cdot 14 \cdot \binom{13}{2} = 16380 \begin{cases} \text{15 val till ordförande} \\ \text{14 val till kassör} \\ \binom{13}{2} \text{ val av 2 ledamöter} \end{cases}$$

Eller: $\binom{15}{4} \cdot 4 \cdot 3$ (först väljer vi styrelse, sedan ordförande bland dessa, och sedan kassör).

**16.** $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_1 = F_2 = 1$.

a) Vi bevisar påståendet med matematisk induktion:

I. $n = 1$ ger $VL = F_1 - F_2 = 1 - 1 = 0$; $HL = 1 - F_1 = 1 - 1 = 0 = VL$.

II. Antag likheten gäller för ett visst $n \ge 1$. Vi får då

$$\begin{gathered} VL_{n+1} = F_1 - F_2 + \cdots + F_{2n-1} - F_{2n} + F_{2n+1} - F_{2n+2} = \\ VL_n + F_{2n+1} - F_{2n+2} = HL_n + F_{2n+1} - (F_{2n+1} + F_{2n}) = \\ 1 - F_{2n-1} - F_{2n} = 1 - F_{2n+1} = HL_{n+1}. \end{gathered}$$

III. I&II ger engligt induktionsprincipen att påståendet gäller för alla $n \ge 1$.

b) $VL_n^b = VL_n^a + F_{2n+1} = HL_n^a + F_{2n+1} = 1 - F_{2n-1} + F_{2n+1} = 1 + F_{2n} = HL_n^b$.

**17.** $(2x + y^3)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3y^3 + 6(2x)^2(y^3)^2 + 4(2x)(y^3)^3 + (y^3)^4 =$
$$16x^4 + 32x^3y^3 + 24x^2y^6 + 8xy^9 + y^{12}.$$

Vi vet att $(a+b)^{18} = \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} a^k b^{18-k}$. För $a = 2$, $b = x^2$, blir termen med index $k$ lika med

$$\binom{18}{k} 2^k (x^2)^{18-k} = \binom{18}{k} 2^k x^{36-2k}.$$

Exponenten för $x$ skall vara 16, dvs. $36 - 2k = 16 \leftrightarrow k = 10$. Termen blir $\binom{18}{10} 2^{10} x^{16}$ med koefficienten $\binom{18}{10} 2^{10}$. (Om det inte sägs något särsilt, får detta anses vara tillräckligt "uträknat" för att kunna ges som svar; annars är det så att

$$\binom{18}{10} 2^{10} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{8!} \cdot 1024 = 44808192.)$$

**18.** Nationerna måste fördela sig 1+1+3 eller 1+2+2, vilket ger antalet sätt:

$$\binom{4}{1}\binom{6}{1}\binom{9}{3}+\binom{4}{1}\binom{6}{3}\binom{9}{1}+\binom{4}{3}\binom{6}{1}\binom{9}{1}+\binom{4}{1}\binom{6}{2}\binom{9}{2}+\binom{4}{2}\binom{6}{1}\binom{9}{2}+$$

$$\binom{4}{2}\binom{6}{2}\binom{9}{1} = 4 \cdot 6 \cdot 84 + 4 \cdot 20 \cdot 9 + 4 \cdot 6 \cdot 9 + 4 \cdot 15 \cdot 36 + 6 \cdot 6 \cdot 36 + 6 \cdot 15 \cdot 9 = 7218.$$

Man kan också använda inklusion-exklusion, men det är väl krånligare. Beräkningen blir

$$\binom{19}{5} - \binom{10}{5} - \binom{13}{5} - \binom{15}{5} + \binom{6}{5} + \binom{9}{5} = 7218.$$

**19.**

a) Placera först A. Eftersom alla sidor är ekvivalenta har hon två val, nämligen om hon skall ha vänster- eller högerplatsen vid en sida. Därefter finns det 7! olika sätt för de övriga att placera sig. Alltså $2 \cdot 7! = 10080$ placeringar.

b) När A placerats har B bara 5 platser att välja på; därefter kan övriga placeras på 6! sätt. Alltså $2 \cdot 5 \cdot 6! = 7200$ placeringar.

**20.** a) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_1 = F_2 = 1$.

b) Tillämpa den definierande relationen (med $n-1$, $n-2$ resp. $n-3$ i stället för $n$):

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = (F_{n-2} + F_{n-3}) + F_{n-2} = 2F_{n-2} + F_{n-3} = 2(F_{n-3} + F_{n-4}) + F_{n-3} =$$

$$3F_{n-3} + 2F_{n-4} = 3(F_{n-4} + F_{n-5}) + 2F_{n-4} = 5F_{n-4} + 3F_{n-5}.$$

c) b) visar att relationen $F_n = F_{k+1}F_{n-k} + F_kF_{n-k-1}$ är sann för $k = 0, 1, 2, 3, 4$ så vi har en betryggande induktionsstart.

Antag nu att den är sann för ett visst $k$, $0 \leq k < n-1$. Samma slags räkning som i b) ger

$$F_n = F_{k+1}F_{n-k} + F_kF_{n-k-1} = F_{k+1}(F_{n-k-1}F_{n-k-2} + F_kF_{n-k-1}) =$$

$$(F_{k+1} + F_k)F_{n-k-1} + F_{k+1}F_{n-k-2} = F_{k+2}F_{n-k-1} + F_{k+1}F_{n-k+2}$$

vilket visar relationen med $k+1$ i stället för $k$ (vi behöver $k < n-1$ såatt $n-k-2 \geq 0$.) Induktionsprincipen ger nu påståendet.

# Iteration och rekursion

**21.** Karakteristisk ekvation

$$3\lambda^2 = \lambda + 2 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (3\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = 1 \text{ eller } \lambda = -\tfrac{2}{3}.$$

Alltså $x_n = a \cdot 1^n + b \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n = a + b \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

Vi kan nu bestäma $a$ och $b$:

$$\begin{cases} 0 = x_0 = a + b \\ 3 = x_1 = a + b \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 3 = b \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{5} \\ b = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

så $x_n = \frac{9}{5}(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n)$.

**22.** Ekvationen kan skrivas $x_{n+2} - x_{n+1} + \frac{1}{4} = 0$; $x_0 = 0, x_1 = 1$. Karakteristisk ekvation

$$\lambda^2 - \lambda + \tfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}.$$

Alltså lösningen $x_n = (a + b \cdot n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\begin{cases} \text{Om} \quad n = 0: \quad 0 = (a + b \cdot 0)\left(\frac{1}{2}\right)^0 = a \\ \text{Om} \quad n = 1: \quad 1 = (a + b \cdot 1)\left(\frac{1}{2}\right)^1 = (a+b) \cdot \frac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

Alltså $x_n = 2 \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

**24.** Ledning: Se (5.15) på sida 283 i Barnett; lösningen har formen (5.19) på sida 284.

# Felrättande koder

**25.** Svar: a) 010101 b) 000000

**26.** Eftersom $11111000 + 00011111 = 11100111$ är koden linjär, så dess minimiavstånd är lika med dess minimivikt som är 5; rättar 2 fel ty $5 > 2 \cdot 2$, upptäcker 4 fel ty $5 > 4$.

**27.**

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Kodordet är $x = c_1c_21c_3010c_4011$, där $c_1$, $c_2$, $c_3$ och $c_4$ bestäms av $H \cdot x = 0$, alltså

$$\begin{cases} c_4 + 0 + 1 + 1 = 0 \\ c_3 + 0 + 1 + 0 = 0 \\ c_2 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 = 0 \\ c_1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_4 = 0 \\ c_3 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

så $x = 00110100011$.

b) Beräkna syndromet $H \cdot x$ för de tre orden: man får

i.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ inget fel – vi fick kodord; meddelande (stryk kontrollbitarna) är 1111111.

ii.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ fel i bit 2 – kontrollbit så ingen informationsbit behöver ändras; meddelande är 1101101.

iii.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ger det binra talet $(1110)_2 = 14 > 11$ s vi har mer n ett fel och kan inte avkoda.