

Blandade övningar till 4 nov.

1. Antag att n är ett positivt heeltal. Bevisa att

a) $n^3 - n$ är delbart med 3.

b) $n^5 - n$ är delbart med 5.

2. Visa att

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{5}\right) \geq 1 + \frac{n(n+1)}{10}, n = 1, 2, \dots$$

3. Vad är $\binom{n}{k}$? Ange formeln för $\binom{n}{k}$. Visa att $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ algebraiskt.

4. Bevisa formeln

$$\binom{3n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{n-k} \binom{n}{k}.$$

5. Visa att

$$\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2} \quad (n \geq k+2).$$

6. Hur många olika ord får man genom att permutera bokstäverna i ordet "institutionen"? I hur många av dessa ord står de tre "n":en inte tillsammans?

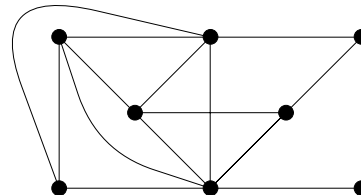
7. Bestäm koefficienten för x^{21} i binomialutvecklingen av $(x^3 + 3)^{15}$.

8. Ange alla kodord i koden med kontrollmatrisen

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Tag samma kod som i uppgift 8. Avgör vilka av följande ord som är kodord och om de inte är kodord, rätta dem inder antagandet att endast ett fel har uppstått: (a) 1111111 (b) 1110000 (c) 1000001

10. Skriv upp en kontrollmatris för den linjära kod som består av alla ord av längd 7 med jämnt vikt.
11. Vilken graf kallas för fullständig? Ge ett exempel av en fullständig graf.
12. Bestäm det kromatiska talet för grafen



Facit

1. *Lösning.*

a) $n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$. Det är produkt av tre efterföljande tal, en av dem måste vara delbart med 3, då är produkten delbar med 3.

b) $n^5 - n = n \cdot (n^4 - 1) = n \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 + 1) = n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1)$. Så är $n^5 - n$ produkt av fyra tal: $(n - 1)$, n , $(n + 1)$ och $(n^2 + 1)$. Sista siffra s av ett tal n är en av de tio siffrorna mellan 0 och 9. Om s är 0 eller 5, då är n delbart med 5, alltså är produkten delbar med 5, dvs. $n^5 - n$ är delbart med 5. Om s är 2, 3, 7 eller 8, är sista siffra av n^2 4, 9, 9, eller 4 respektiv, som ger att $(n^2 + 1)$ är delbart med 5. Alltså i detta fal är produkten $(n^5 - n)$ delbar med 5. Om s är 4 eller 9, är $(n + 1)$ delbart med 5, alltså är $n^5 - n$ delbart med 5. Till sist, om s är 1 eller 6, är $(n - 1)$ delbart med 5, dvs. i detta fal är $n^5 - n$ delbart med 5.

3. $\binom{n}{k}$ är antalet kombinationer, dvs. antalet sätt att välja k element bland n givna oavsett från ordningen mellan de valda element. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

6. Det finns $\frac{13!}{3!3!3!} = 28828800$ ord; de tre "n":en står inte tillsammans i

$$28828800 - 11 \cdot \frac{10!}{3!3!} = 28828800 - 1108800 = 27720000$$

ord.

7 Koefficienten är $\binom{15}{7}3^8$.

8. *Lösning.* H ger följande ekvationer:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + x_7 = 0 \\ x_4 + x_5 + x_7 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_7 = 0 \\ x_6 + x_7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + x_4 + x_7 \\ x_5 = x_4 + x_7 \\ x_3 = x_1 + x_4 + x_7 \\ x_6 = x_7 \end{cases}$$

x_1, x_4, x_7 kan väljas godtyckliga. Sedan är x_2, x_3, x_5, x_6 entydigt bestämda.

De 8 valen av x_1, x_4, x_7 ger orden

$\{(0000000), (1111011), (0001011), (1000111), (1001100), (1110000), (0111100), (0110111)\}$.

9. *Lösning.*

(a) Syndrom $H \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Det är fel i position 5. Rätt ord är

1111011.

(b) Syndrom $H \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Det är ett kodord.

(c) Syndrom $H \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mer än ett fel och kan inte avkodas.

10. *Lösning.* Ett ord $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ har jämnt vikt om och endast om $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0$ i Z_2 . Detta ger att vi kan ta $H = (1111111)$ som kontrollmatris.

11. En graf är fullständig om det finns precis en kant mellan varje par av olika noder. Ett exempel av en fullständig graf är C_4 :

12. 4.

