

### Blandade övningar till 8 nov.

1. Visa att  $n^3 + 3n^2 - 4n$  är delbart med 6 för alla  $n \geq 0$ .
2. Formulera delbarhetstest för talen 15, 30.
3. En viss PIN-kod består av fyra tecken, som vart och ett är en av de 26 bokstäverna A - Z eller en av siffrorna 0 - 9.
  - a) Hur många olika PIN-koder kan bildas om alla fyra tecken måste vara olika?
  - b) Hur många finns det om tecken får upprepas i koden och den börjar med en bokstav?
  - c) Hur många finns det med en 1:a och en 2:a och två olika bokstäver?
4. Från en grupp om 120 personer ska väljas en styrelse om 5 personer. Personerna A och B ställer som villkor att om en av dem väljs, så ska båda väljas. På hur många olika sätt kan då styrelsen sammansättas?
5. Visa att
$$\sum_{k=1}^n k(k+2)2^k = -2 + 2^{n+1}(n^2 + 1)$$
för  $n = 1, 2, 3 \dots$
6. Hur många arrangemang av siffrorna 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 finns det, om den första siffran skall vara större än 1 och den sista mindre än 8?
7. Hur många  $n$ -siffriga tal kan man bilda med hjälp av siffrorna 1 ooch 2, omm talen skall innehålla minst en etta och minst en tvåa? ( $n \geq 2$ .)
8. Bland Uppsalas 149300 invånare finns det en grupp på minst ..?.. personer, som har samma sista fyra siffror i personnumret.
9. Betrakta koden  $C = \{(010100), (111000), (011010), (101010)\}$ . Är  $C$  linjär? Vad har  $C$  för vikten? minimiavståndet? Hur många fel upptäcker den? korrigerar?

10. Den  $n$ -dimensionella kuben  $Q_n$  är den graf, vilkens noder kan beskrivas med "ord" av formen  $a_1a_2 \cdots a_n$ , där var och en av  $a_k$  är en nolla eller etta, och de kanter som finns med i kuben är precis de som förbinder noder som skiljer sig åt på ett ställe i sina beskrivningar.

a) Rita en bild av 4-kuben  $Q_4$ !

b) Bestäm antalet noder i den  $n$ -dimensionella kuben  $Q_n$ .

## Facit

1 Låt  $a = n^3 + 3n^2 - 4n = n(n^2 + 3n - 4) = n(n - 1)(n + 4)$ . Vi skall bevisa att  $a$  är delbart med 6.  $a$  är jämnt, eftersom antingen  $n$  eller  $(n - 1)$  är jämnt. Så är det räcker att visa att  $a$  är delbart med 3, eftersom  $6 = 2 \cdot 3$ . Om  $n$  eller  $(n - 1)$  är delbart med 3, det är ok, då är  $a$  delbart med 3. Annars har vi att  $(n + 1)$  måste vara delbart med 3 ( $(n - 1)$ ,  $n$  och  $(n + 1)$  är tre efterföljande tal). Men om  $(n + 1)$  är delbart med 3, då måste  $(n + 4)$  vara delbart med 3 (det är enkelt att se), därför  $a$  är delbart med 3.

2. Om siffersumman av talet  $a$  är delbar med 3 och den sista siffran är antingen 0 eller 5, är  $a$  delbart med  $15 = 3 \cdot 5$ . Om siffersumman av talet  $b$  är delbar med 3 och den sista siffran är 0, är  $b$  delbart med  $30 = 3 \cdot 10$ .

3. Vi har totalt 36 tecken att arbeta med.

a) Antalet permutationen av 4 tecken valda bland 36 är ju  $P(36, 4) = 1413720$  stycken.

b) Antalet blir  $26 \cdot 36^3 = 1213056$  stycken.

c) Antalet blir  $2 \cdot \binom{4}{2} \cdot P(26, 2) = 7800$ .

4. Antingen båda A och B är i styrelsen eller båda A och B inte är i styrelsen. Alltså svaret blir

$$\binom{118}{3} + \binom{118}{5}.$$

6. Om den första siffran är 8 eller 9, då kan vi välja den sista siffran på 8 sätt (bland siffrorna 0,1,...,7) och sedan permutera de siffrorna som är kvar på 8! sätt. Alltså har vi  $2 \cdot 8 \cdot 8! = 645120$  möjligheter. Annars kan vi välja den första siffran på 6 sätt (bland siffrorna 2,3,...,7), sedan välja den sista

siffran på 7 sätt (bland siffrorna 0,1,...,7 utom den första siffran), och sedan permutera de siffrorna som är kvar på  $8!$  sätt. Alltså har vi  $6 \cdot 7 \cdot 8! = 1693440$  möjligheter. Alltså totalt 2338560.

7.  $2^n - 2$ .

8. 15.

9.  $C$  är inte linjär eftersom bl.a.  $(000000) \notin C$ . Vikten är 2. Minimiavståndet är 2.  $C$  upptäcker ett fel, men kan inte korrigera fel.

10. b)  $2^n$ .