Övning Geometri

B.2,3,4) Alla trianglar är kongruenta, i 3) är de sista två spegelvända.

B.6) Fyra sidor och en vinkel bestämmar fyrhörningen inte: två sidor och mellanliggande vinkeln bestämmer en triangel, vars tredje sidan är diagonalen i fyrhörningen. Triangeln med diagonalen som bas och de två andra givna sidor kan läggas på båda sidor av diagonalen.
Med tre sidor och två vinklar kan man skilja mellan V–V–S–S–S, V–S–V–S–S, V–S–S–V–S och S–V–S–V–S. I de första tre fall kan man rita två icke-kongruenta fyrhörningar. Sista fallet är en kongruensfall; drag diagonalerna för att visa detta.
Om tre vinklar är givna är den fjärde också känd. Två närbelägna sidor ger nu ett kongruensfall. Givet två motstående sidor drar vi de andra två ut tills de skär varandra; vi får två par kongruenta trianglar och darmed ett kongruensfall. Om det inte finns någon skärningspunkt (dvs de andra två sidorna är parallella) går det inte att konkludera och vi har då faktiskt oändligt många icke-kongruenta fyrhörningar.

C.3) Dra en cirkel om C med godtycklig radie. Den skär vinkelbenet CD i D' och CE i E'. Cirkeln med medelpunkt A och samma radie $|CD'|$ skär AB i B'. Skär nu denna cirkel med cirkeln med medelpunkt B' och radie $|D'E'|$.

D.2) Låt $ABCD$ vara parallellogrammen. Förläng AD och BC. Då är $\angle A$ och sidovinkeln $\angle D'$ vid D likbelägna och därför lika stora, ty AB och DC är parallella. Eftersom AD och BC är parallella är alternatvinklarna $\angle D'$ och $\angle C$ lika stora. Så $\angle A \cong \angle C$.

D.3) Drag diagonalen BD. Då är $\angle ABD \cong \angle CDB$ och $\angle ADB \cong \angle CBD$ (alternatvinklar). Nu är $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (V–S–V), så $AB \cong CD$.

D.4) Sidovinkeln $\angle D'$ är också rät, så $\angle A \cong \angle D'$ och därför är AB och DC parallella. Alternatvinklarna $\angle D'$ och $\angle C$ är lika stora, så AD och BC är parallella.

D.5) Sidovinkeln $\angle D'$ är likbelägen med $\angle A$ och därför rät. Då är $\angle D$ också rät.

D.6) Drag diagonalen BD. Då är $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (S–S–S). Därför är $\angle ABD \cong \angle CDB$ och $\angle ADB \cong \angle CBD$ så AB och CD är parallella, liksom AD och BC.

D.7) Låt E vara diagonalernas skärningspunkt. Nu är $\triangle AED \cong \triangle CEB$ så $|AE| = |EC|$ och $|BE| = |ED|$.

F) Mät först alla sidor. Fyrhörningen är en parallellogram omm motstående sidorna är lika stora (D.3 och D.6). Om de är lika stora, mät då också diagonalerna. De är lika stora om och endast om $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ omm $\angle B$ och $\angle A$ är lika stora, dvs båda räta.

G.3) Sträckor är kommensurabla omm de är multipla av samma sträckan. Det gemensamma måtet kan hittas med Euklides algoritm.

H.2) Låt AB vara basen till parallellogrammen $ABCD$. Drag normalerna genom A och B. De skär linjen CD i D' resp C'. Då är trianglarna $\triangle ADD'$ och $\triangle BCC'$ kongruenta. Så $area(ABCD) = area(ABCD') - area(ADD') = area(ABCD') - area(BCC') = area(ABC'D')$ och därmed är arean till $ABCD$ lika med $|AB| \cdot |AD'|$.

I.2) Låt l_n vara längden av S_n:s omkrets. I den induktiva konstruktionen ersätter vi en sida med fyra nya sträckor av en tredjedels längd. Därför är $l_n = \frac{4}{3} l_{n-1} = (\frac{4}{3})^n l_0$.

I.3) $l_n \to \infty$ då $n \to \infty$, medan arean är begränsad.

J.4) Låt rektangeln ha sidor av längd x och $x+y$. Om vi ta bort kvadraten med sidan x återstår rektangeln med sidor av längd y och x. Vi kräver att $(x+y) : x = x : y$ eller $x^2 - xy - y^2 = 0$. Så $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} y$.

L) Konstruktionen för problem 5 på S. 15 i kompendiet ger likformiga trianglar.

M.4) Först måste vi förklara hur figuren ritades. Börja med den stora kvadraten och markera de fyra punkter på sidorna. Dra sammanbindningslinjerna. Sen visar vi att den lilla fyrhörningen är en kvadrat. Arean till den stora kvadraten är $(a+b)^2$ men också $c^2 + 4 \cdot (ab/2)$, varav $a^2 + b^2 = c^2$.

N) Låt spikarna stå i punkterna P och Q. Figuren är den del av cirkeln C genom P och Q som ligger på spetsens sida. Cirkeln C har PQ som korda och medelpunktsvinkel är två gånger så stor som spetsens vinkel. Bevis: låt spetsen sta i punkt S. I triangel $\triangle PQS$ omskrivna cirkel är medelpunktsvinkel två gånger spetsens vinkel så den här cirkeln är samma som cirkeln C.

O) Du rör dig i en cirkel. För att kontrollera att du inte rör dig behövs en referenspunkt till.

Q) Låt P vara respektive skärningspunkt.

a) $\frac{2}{3} a$ enligt beviset för sats 15.

b) med bisektrissatsen: $|BM| : |CM| = |AB| : |AC| = c : b$. Eftersom $|CM| = a - |BM|$ får vi $|BM| = ac/(b+c)$.

c) låt D' vara mittpunkten på AB. Då är $\triangle BPD'$ och $\triangle BCA$ likformiga. Vi får $|BP| = \frac{1}{2} c^2 / b$.

d) höjderna är mittpunktsnormalerna i en större triangel $\triangle A'B'D'$ (jfr beviset för sats 19). Avståndet blir $2b - c^2/b = (b^2 - a^2)/b$.