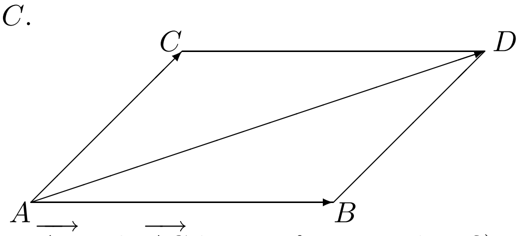
Explorativ övning Vektorer

Syftet med denna övning är att ge grundläggande kunskaper om vektorräkning och dess användning i geometrin.

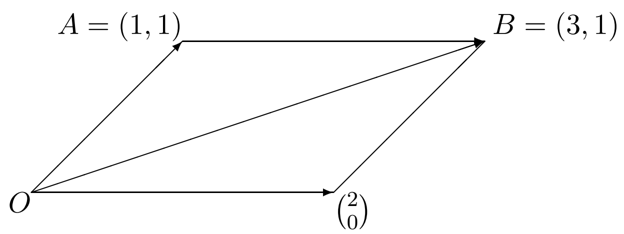
En vektor är en riktad sträcka. Vektorn $\overrightarrow{AB}$ har fotpunkt A och spets B. **Vektorer kan bara adderas om de har samma fotpunkt.** Summan $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ är den riktade diagonalen $\overrightarrow{AD}$ i parallellogrammen $ABDC$.



(Hur definieras summan om $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ ligger på samma linje?)

För att få en koordinatbeskrivning av vektorer måste vi fixera en punkt O som origo och enhetsvektorer $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$. Om vi nu har valt en punkt som origo betraktar vi om inget annat sägs bara vektorer av typ $\overrightarrow{OP}$ med fotpunkt O. För varje vektor $\overrightarrow{AB}$ i planet finns det precis en vektor med samma längd och riktning med fotpunkt i origon, nämligen $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Exempel.



$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \binom{3}{1} - \binom{1}{1} = \binom{2}{0}$.

Ibland uttrycker man sig att $\overrightarrow{AB} = \binom{2}{0}$ (t ex i boken). Formellt gör man så här: att ha samma längd och riktning är en ekvivalensrelation på mängder av alla riktade sträckor (kolla detta!). En vektor

LMA100, ht 03

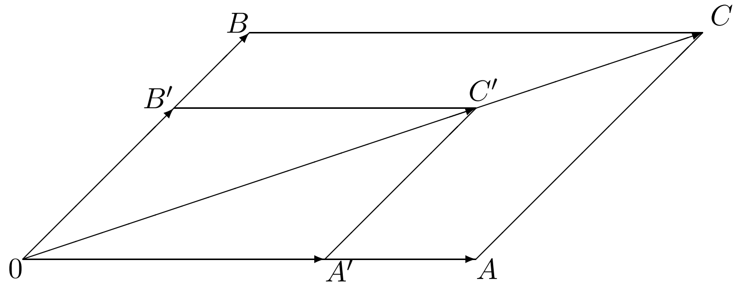
är då en ekvivalensklass. I varje ekvivalensklass finns precis en riktad sträcka med fotpunkt i origon. I exemplet är den riktade sträckan $\overrightarrow{AB}$ och sträckan mellan O och punkten $(2,0)$ representanter för samma vektor.

De viktigaste begreppen och satser i detta avsnitt är:

- vektorer, multiplikation med skalärer, vektor addition, koordinater
- skalärprodukt, vektorprodukt
- plan och linjer, avstånd mellan punkter, linjer och plan
- andragradskurvor

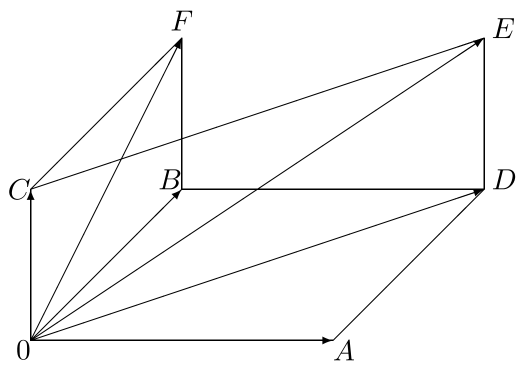
Övning A

1. Visa distributivitet for skalärmultiplikation: $\lambda(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \lambda\,\overrightarrow{OA}+\lambda\,\overrightarrow{OB}$.
Ledning.



Låt $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ och $\overrightarrow{OC'} = \lambda\,\overrightarrow{OC}$. Dra $A'C'$ parallell med AC och $B'C'$ parallell med BC. Visa (med euklidisk geometri) att $\overrightarrow{OA'} = \lambda\,\overrightarrow{OA}$ och likadant $\overrightarrow{OB'} = \lambda\,\overrightarrow{OB}$.

2. Visa associativitet för vektoraddition: $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.
Ledning.



Låt $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}$ och $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Visa nu att $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF}$, d v s att $OAEF$ är en parallellogram (euklidisk geometri!).

Övning B

1. Lös uppgifterna 1.1.b,c,d, 1.4, 1.6, 1.7 och 1.12 i boken på sid. 88–90.
2. Lös uppgifterna 1.18 ($\overrightarrow{AB}$ är vektorn med fotpunkt A och spets B. Dess koordinater fås fram ur vektorn $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, som har fotpunkt i origon), 1.19, 1.20, 1.24, 1.25 och 1.27 i boken på sid. 91–93.

Övning C

Vad finns det för likheter och skillnader mellan skalärprodukt och vektorprodukt?

Övning D

1. Lös uppgifterna 1.35, 1.36, 1.38, 1.42, 1.44 och 1.49 i boken på sid. 94–95.
2. Lös uppgifterna 1.52, 1.57, 1.65 och 1.67 i boken på sid. 96–97.

Övning E

1. Lös uppgifterna 1.69, 1.70, 1.71, 1.72, 1.73, 1.74, 1.76, 1.80, 1.86 och 1.87 i boken på sid. 98–100.
2. Lös uppgifterna 1.103, 1.106 och 1.110 i boken på sid. 101–102.

Övning F

Lös uppgifterna 1.117, 1.118, 1.119, 1.124, 1.127, 1.128 och 1.139 i boken på sid. 103–106.