VT03
LMA100: Diskret Matematik
Göteborgs universitet
SK

Repetition I

(matematisk induktion, kombinatorik, iteration och rekursion)

Vi förbereder oss för övningstenta (som skall vara den 9 april) genom att lösa följande övningar och svara på teoretiska frågorna.

1 Matematisk induktion

1.1 Frågor om teori

1. Formulera induktionsprincipen. (*Låt P_n vara en utsaga om ett naturligt tal n, och antag att följande påståenden är sanna:*

(a) P_0 är sann;

(b) För varje $k \geq 0$ gäller att om P_k är sann, så är även P_{k+1} sann.

Då är P_n sann för alla naturliga tal n.)

1.2 Övningar

Övning 1. Bevisa med matematisk induktion att för $n = 1, 2, 3, ...$ gäller $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$.

Övning 2. Bevisa med matematisk induktion att $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, för alla heltal $n \geq 1$.

Övning 3. Bevisa att $3^n > n^3$ för $n \geq 4$.

Övning 4. Bestäm det minsta positiva heltalet n för vilket olikheten $2^n > (n^2 + 1)$ gäller och visa olikheten med induktion från och med det talet.

Övning 5. Visa med hjälp av induktion att $\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k-1) = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6}$, för alla $n \geq 1$.

Övning 6. Visa att $\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} > (n-1)!$ för $n \geq 3$.

2 Kombinatorik

2.1 Frågor om teori

2. Formulera multiplikationsprincipen. (*Om fösta beslut innebär ett val mellan* n_1 *alternativ, andra beslut innebär ett val mellan* n_2 *alternativ, osv, och beslutet skall fattas* m *gånger i följd, oberooende av varandra, så finns det* $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m$ *möjliga beslutsföljder.*)

3. Formulera additionsprincipen. (*Antag att vi har möjlighet att välja mellan två "objekt"* A *och* B*, där* A *förekommer i* n *varianter och* B *i* m *varianter. Antalet sätt att välja mellan* n *varianter av* A *och* m *varianter av* B *är* $n+m$.)

4. Vad är permutationer? (*Ur en mängd (grundmängd) av* n *olika objekt (föremål) skall man utvälja en delmängd av* k *objekt, som skall uppräknas i en viss ordningsföljd. En sådan ordnad delmängd kallas en permutation av* k *element ur* n *givna.*)

5. Hur många permutationer av k olika objekt valda bland n givna finns det? (Svar: $P(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.)

6. Vad är kombinationer? (*Vi väljer ut* k *element bland* n *givna, men nu bortser vi från ordninigen mellan de valda elementen. Detta kallar man för att välja ut en kombination av* k *element ur de* n *givna. En kombination kan även helt enkelt ses som en delmängd av den givna grundmängden.*)

7. Hur många olika kombinationer av k element ur de n givna finns det? (Svar: $\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.)

8. Formulera Dirichlets lådprincip. (*Om* $n+1$ *föremål skall fördelas på* n *fack, måste minst ett fack komma att innehålla mer än ett föremål.*)

9. Formulera Binomialsatsen. *Om* n *är ett naturligt tal, så gäller*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

10. Visa Binomialsatsen.
Det går att visa satsen med matematisk induktion. Men det är enklare att visa den på föjlande sätt:
Man har

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ stycken}}.$$

Om vi multiplicera de n faktorerna i HL, får vi ett antal termer som alla har formen $x^j y^k$ med $j+k=n$, dvs. termer som kan skrivas $x^{n-k}y^k$ med

$0 \leq k \leq n$. Frågan är: för ett visst k-värde – hur många termer får man av denna form? En sådan term uppstår genom att man ur var och en av de n parenteserna väljer endera x eller y. Vi kan t. ex. tala om ur vilka k av dem vi väljer y. Detta kan göras på $\binom{n}{k}$ sätt, vilket betyder att antalet termer av formen $x^{n-k}y^k$ är just $\binom{n}{k}$.

11. Skriv upp några första rader i Pascals triangel.

12. Vilka formler använder vi för att bygga Pascals triangel? (Svar: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ och $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, där $1 \leq k \leq n$.)

13. Visa att antalet heltals lösningar $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ till ekvationen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r,$$

där $x_i \geq 0$ för alla i, är $\binom{n+r-1}{r}$.
Bevis: Vi genomför beviset genom att lösa fördelningsproblemet, nämligen: Vi har r stycken identiska kulor och vi vill placera dem i n olika lådor. På hur många sätt kan detta ske? Om vi här låter x_i beteckna antalet kulor som läggs i låde nummer i så får vi att fördelningsproblemet är ekvivalent med problemet i frågan. Vi löser fördelningsproblemet genom att lägga objekten på rad och att placera in $n-1$ stycken mellanväggar för att markera vilka objekt som hamnar i respektive låda.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \bullet\bullet\cdots\bullet & | & \bullet\cdots\bullet & | & & | & \bullet\cdots\bullet & | & \bullet & | & \bullet\cdots\bullet \\ \text{låda 1} & & \text{låda 2} & & \text{låda 3} & & \cdots & & \cdots & & \text{låda } n \end{array}$$

Här har vi totalt $n+r-1$ objekt, r stycken $\bullet$ och $n-1$ stycken $|$, och vi är intresserade av antalet sätt att arrangera dessa. Detta antal är lika med $\binom{n+r-1}{r}$.

2.2 Övningar

Övning 7. Hur många "ord" med 10 (svenska) bokstäver finns det? Hur många där de första och sista bokstäverna är olika.

Övning 8. Givet är de 7 bokstäverna i ordet APPARAT. Hur många olika "ord" (=bokstavspermutationer) kan man bilda av dem med

a) 7 bokstäver?

b) 5 bokstäver?

Övning 9. Hur många 6-bokstaviga "ord" kan man bilda ur ordet PASCAL? Hur många 4-bokstaviga ur det?

Övning 10. Hur många sjusiffriga tal finns det som innehåler siffrorna 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3?

Övning 11. Om alla 6-bokstaviga "ord" som kan bildas ur ordet FLICKA ordnas i bokstavsordning, vilket ord kommer

a) föst

b) sist

c) på plats 5?

Övning 12. Visa kombinatoriskt att

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}+\ldots+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

för $0 \leq k \leq m, n$.
Visa med hälp av detta att

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2.$$

Övning 13. I en förening med 15 medlemmar skall väljas en styrelse bestående av ordförande, kassör och två övriga ledamöter.

a) Hur många olika styrelser är möjliga?

b) Om föreningen består av 7 damer och 8 herrar och styrelsen skall bestå av 2 damer och 2 herrar samt ordförande och kassör skall vara av olika kön, hur många styrelser är då möjliga?

Övning 14. Definiera Fibonacciföljeden (F_n). Visa att (F_n) uppfyller likheten

a) $F_1 - F_2 + F_3 - F_1 + \cdots + F_{2n-1} - F_{2n} = 1 - F_{2n-1}$;

b) $F_1 - F_2 + F_3 - F_1 + \cdots - F_{2n} + F_{2n+1} = 1 + F_{2n}$.

Ledning. (a) visas lämplingen med induktion; (b) kan enkelt visas ur resultatet i (a) eller direkt med induktion.

Övning 15. Utveckla $(2x+y^3)^4$. Bestäm koefficienten för x^{16} i utvecklingen av $(2+x^2)^{18}$.

Övning 16. Ur en församling på 4 danskar, 6 norrmän och 9 svenskar skall väljas en kommitté på 5 personer så att alla 3 nationerna är representerade. På hur många sätt kan det göras?

Övning 17. Åtta personer, A, B, C, D, E, F, G och H, skall placeras runt ett kvadratiskt bord med plats för två personer vid varje sida.

a) Hur många placeringar är möjliga om det inte spelar någon roll vid vilken sida av bordet man sitter men däremot huruvida man har höger- eller vänsterplatsen vid en sida?

b) Hur många om dessutom A och B inte skall sitta intill varandra?

Övning 18. a) Definiera Fibonacciföljden (F_n).

b) Använd Fibonacciföljdens definierande relation för att visa att (för $n \geq 5$)

$$\begin{aligned} F_n &= 2F_{n-2} + F_{n-3} \\ &= 3F_{n-3} + 2F_{n-4} \\ &= 5F_{n-4} + 3F_{n-5} \end{aligned}$$

c) Visa allmänt $F_n = F_{k+1}F_{n-k} + F_kF_{n-k-1}$ för $0 \leq k \leq n-1$.

3 Iteration och rekursion

Övning 19. Lös differensekvationen $3x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 3$.

Övning 20. Lös differensekvationen $4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$, $n \geq 0$; $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Övning 21. Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n \\ y_0 = y_1 = 1 \end{cases}$$

Övning 22. Bestäm ett explicit uttryck för a_n, $n \geq 0$, då

a) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, samt $a_0 = 2$ och $a_1 = 1$;

b) $a_n = 2a_{n-1} + 2$, samt $a_0 = 1$.

Lösningsförslag till utvalda uppgifter

Matematisk induktion

1. För $n = 1$ är $VL = 1$ och $HL = \frac{1}{6}(2 + 3 + 1) = 1$. Påståendet är alltså sant för $n = 1$.

Antag nu att påståendet är sant för något n-värde, säg $n = p$. Då gäller alltså $VL_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{1}{6}(2p^3 + 3p^2 + p) = HL_p$ (induktionsantagandet). I så fall blir för $n = p + 1$:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} k^2 = VL_p + (p+1)^2 = HL_p + (p+1)^2 =$$
$$\tfrac{1}{6}(2p^3 + 3p^2 + p) + (p+1)^2 = \tfrac{1}{6}(2p^3 + 9p^2 + 13p + 6),$$

medan

$$HL_{p+1} = \frac{1}{6}(2(p+1)^3 + 3(p+1)^2 + (p+1)) = \frac{1}{6}(2p^3 + 9p^2 + 13p + 6),$$

dvs. $VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Vi har alltså visat att om påståendet är sant för $n = p$, så är det också sant för $n = p + 1$. Induktionsprincipen ger att påståendet är sant för alla heltal $n \geq 1$.

3. För $n = 4$ är $VL = 3^4 = 81$, $HL = 4^3 = 64$. Eftersom $81 > 64$, är påståendet sant för $n = 4$.

Antag nu att påståendet är sant för något $n = p$, där vi kan anta att $p \geq 4$; vi antar alltså att vi vet att $3^p > p^3$. I så fall blir

$$VL_{p+1} - HL_{p+1} = 3^{p+1} - (p+1)^3 =$$
$$3 \cdot \mathbf{3^p} - p^3 - 3p^2 - 3p - 1 > 3 \cdot \mathbf{p^3} - p^3 - 3p^2 - 3p - 1 =$$
$$2\mathbf{p^3} - 3p^2 - 3p - 1 \geq_{(\text{vi använder } p \geq 4)} 2 \cdot \mathbf{4p^2} - 3p^2 - 3p - 1 =$$
$$5p^2 - 3p - 1 > 5p - 3p - 1 = 2p - 1 > 0.$$

Under förutsättning att påståendet gäller för ett p (som är ≥ 4), så gäller det tydligen också för $n = p + 1$. På grund av induktionsprincipen är påståendet sant för alla $n \geq 4$.

6. För $n = 3$ är $VL_3 = \frac{9}{4}$ och $HL_3 = 2$; $\frac{9}{4} > 2$. Påståendet är alltså sant för $n = 3$.

Antag nu att påståendet är sant för något n-värde, säg $n = p$. Då gäller alltså $VL_p = \left(\frac{p}{2}\right)^{p-1} > (p-1)! = HL_p$ (induktionsantagandet). I så fall blir för $n = p + 1$:

$$VL_{p+1} = \left(\frac{p+1}{2}\right)^p = \left(\frac{1}{2}\right)^p (p+1)^p = (\text{binomialsatsen}) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p (p^p+\binom{p}{1}p^{p-1}+\binom{p}{2}p^{p-2}+\cdots+\binom{p}{p-1}p+1) > \left(\frac{1}{2}\right)^p (p^p+\binom{p}{1}p^{p-1}) =$$

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^p\cdot p^p = p\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^{p-1} > \text{(enligt induktionsantagandet)}$$

$$p\cdot(p-1)! = p! = HL_{p+1},$$

dvs $VL_{p+1} > HL_{p+1}$. Induktionsprincipen ger att påståendet är sant för alla heeltal $n \geq 3$.

Kombinatorik

7. Totalt finns det 29^{10} ord. Om sista bokstav skiljar sig från den första, har vi $28\cdot 29^9$ ord.

8. a) $\frac{7!}{3!2!} = 420$ eftersom vi har 3A och 2P. b) Dela upp i fall:

I. 3A, 2P: $\frac{5!}{3!2!} = 10$.

II. 3A, ≤1P: $\binom{5}{3}$ sätt att placera de 3 A:na, sedan $3\cdot 2$ sätt att i ordning välja 2 av P, R, T; alltså $\binom{5}{3}\cdot 3\cdot 2 = 60$. *Eller*: $\binom{3}{2}$ sätt att välja 2 av P, R, T. Sedan $\frac{5!}{3!}$ att ordna våra 5 bokstäver, av vilka 3 är A och övriga är olika.

III. 2A, 2P: $\binom{5}{2}$ sätt att placera A:na, sedan $\binom{3}{2}$ sätt att placera P:na, till sist val mellan R och T; alltså $\binom{5}{2}\binom{3}{2}\cdot 2 = 60$. *Eller*: 2 sätt att välja R eller T, $\frac{5!}{2!2!}$ sätt att ordna bokstäverna.

IV. 2A, P, R, T: $\binom{5}{2}\cdot 3!$ eller $\frac{5!}{2!} = 60$.

V. A, 2P, R, T: som IV 60.

Totalt $10 + 4\cdot 60 = 250$.

10. Siffran 0 får inte komma på talets fösta plats, därför kan vi välja den fösta siffran bland de andra 6 siffrorna. Den andra siffran väljas bland 6 siffror som är kvar, den tredje siffran bland 5 siffror som är kvar osv. Då har vi $6\cdot 6!$ möjligheter. Men det finns repetition av siffror, alltså blir svaret $\frac{6\cdot 6!}{3!2!} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 360$.

11. Svar: a) ACFIKL b) LKIFCA c) ACFLIK

12. Först visar vi den första likheten.

Vi skall i VL välja k objekt bland $(m+n)$ givna. Kalla m av dem blå, n stycken röda. Vi kan då välja 0 blå och k röda, 1 blått och $(k-1)$ röda, 2 blå och $(k-2)$ röda, ... , $(k-1)$ blå och 1 rött eller k blå och 0 röda, vilket kan göras på det antalet sätt som HL anger.

Med $k=m=n$ ger fösta påstående

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0},$$

och HL här är lika med påståendets HL eftersom $\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$ för $0\leq r\leq n$.

13. Vi kan räkna på två sätt:

$$15\cdot 14\cdot\binom{13}{2}=16380\begin{cases}15 \text{ val till ordförande}\\ 14 \text{ val till kassör}\\ \binom{13}{2} \text{ val av 2 ledamöter}\end{cases}$$

Eller: $\binom{15}{4}\cdot 4\cdot 3$ (först väljer vi styrelse, sedan ordförande bland dessa, och sedan kassör).

14. $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $F_1=F_2=1$.

a) Vi bevisar påståendet med matematisk induktion:

I. $n=1$ ger $VL=F_1-F_2=1-1=0$; $HL=1-F_1=1-1=0=VL$.

II. Antag likheten gäller för ett visst $n\geq 1$. Vi får då

$$\begin{gathered}VL_{n+1}=F_1-F_2+\cdots+F_{2n-1}-F_{2n}+F_{2n+1}-F_{2n+2}=\\ VL_n+F_{2n+1}-F_{2n+2}=HL_n+F_{2n+1}-(F_{2n+1}+F_{2n})=\\ 1-F_{2n-1}-F_{2n}=1-F_{2n+1}=HL_{n+1}.\end{gathered}$$

III. I&II ger engligt induktionsprincipen att påståendet gäller för alla $n\geq 1$.

b) $VL_n^b=VL_n^a+F_{2n+1}=HL_n^a+F_{2n+1}=1-F_{2n-1}+F_{2n+1}=1+F_{2n}=HL_n^b$.

15. $(2x+y^3)^4=(2x)^4+4(2x)^3y^3+6(2x)^2(y^3)^2+4(2x)(y^3)^3+(y^3)^4=$
$16x^4+32x^3y^3+24x^2y^6+8xy^9+y^{12}$.

Vi vet att $(a+b)^{18}=\displaystyle\sum_{k=0}^{18}\binom{18}{k}a^kb^{18-k}$. För $a=2$, $b=x^2$, blir termen med index k lika med

$$\binom{18}{k}2^k(x^2)^{18-k}=\binom{18}{k}2^kx^{36-2k}.$$

Exponenten för x skall vara 16, dvs. $36-2k=16\leftrightarrow k=10$. Termen blir $\binom{18}{10}2^{10}x^{16}$ med koefficienten $\binom{18}{10}2^{10}$. (Om det inte sägs något särsilt, får detta anses vara tillräckligt "uträknat" för att kunna ges som svar; annars är det så att

$$\binom{18}{10}2^{10}=\frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{8!}\cdot 1024=44808192.)$$

16. Nationerna måste fördela sig 1+1+3 eller 1+2+2, vilket ger antalet sätt:

$$\binom{4}{1}\binom{6}{1}\binom{9}{3}+\binom{4}{1}\binom{6}{3}\binom{9}{1}+\binom{4}{3}\binom{6}{1}\binom{9}{1}+\binom{4}{1}\binom{6}{2}\binom{9}{2}+\binom{4}{2}\binom{6}{1}\binom{9}{2}+$$

$$\binom{4}{2}\binom{6}{2}\binom{9}{1} = 4\cdot 6\cdot 84+4\cdot 20\cdot 9+4\cdot 6\cdot 9+4\cdot 15\cdot 36+6\cdot 6\cdot 36+6\cdot 15\cdot 9 = 7218.$$

Man kan också använda inklusion-exklusion, men det är väl krånligare. Beräkningen blir

$$\binom{19}{5} - \binom{10}{5} - \binom{13}{5} - \binom{15}{5} + \binom{6}{5} + \binom{9}{5} = 7218.$$

17.

a) Placera först A. Eftersom alla sidor är ekvivalenta har hon två val, nämligen om hon skall ha vänster- eller högerplatsen vid en sida. Därefter finns det 7! olika sätt för de övriga att placera sig. Alltså $2 \cdot 7! = 10080$ placeringar.

b) När A placerats har B bara 5 platser att välja på; därefter kan övriga placeras på 6! sätt. Alltså $2 \cdot 5 \cdot 6! = 7200$ placeringar.

18. a) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_1 = F_2 = 1$.

b) Tillämpa den definierande relationen (med $n-1$, $n-2$ resp. $n-3$ i stället för n):

$$F_n = F_{n-1}+F_{n-2} = (F_{n-2}+F_{n-3})+F_{n-2} = 2F_{n-2}+F_{n-3} = 2(F_{n-3}+F_{n-4})+F_{n-3} =$$

$$3F_{n-3} + 2F_{n-4} = 3(F_{n-4} + F_{n-5}) + 2F_{n-4} = 5F_{n-4} + 3F_{n-5}.$$

c) b) visar att relationen $F_n = F_{k+1}F_{n-k} + F_kF_{n-k-1}$ är sann för $k = 0, 1, 2, 3, 4$ så vi har en betryggande induktionsstart.

Antag nu att den är sann för ett visst k, $0 \leq k < n-1$. Samma slags räkning som i b) ger

$$F_n = F_{k+1}F_{n-k} + F_kF_{n-k-1} = F_{k+1}(F_{n-k-1}F_{n-k-2} + F_kF_{n-k-1}) =$$

$$(F_{k+1} + F_k)F_{n-k-1} + F_{k+1}F_{n-k-2} = F_{k+2}F_{n-k-1} + F_{k+1}F_{n-k+2}$$

vilket visar relationen med $k+1$ i stället för k (vi behöver $k < n-1$ såatt $n-k-2 \geq 0$.) Induktionsprincipen ger nu påståendet.

Iteration och rekursion

19. Karakteristisk ekvation

$$3\lambda^2 = \lambda + 2 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (3\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = 1 \text{ eller } \lambda = -\tfrac{2}{3}.$$

Alltså $x_n = a \cdot 1^n + b \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n = a + b \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

Vi kan nu bestäma a och b:

$$\begin{cases} 0 = x_0 = a + b \\ 3 = x_1 = a + b \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 3 = b \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{5} \\ b = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

så $x_n = \frac{9}{5}(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n)$.

20. Ekvationen kan skrivas $x_{n+2} - x_{n+1} + \frac{1}{4} = 0$; $x_0 = 0, x_1 = 1$. Karakteristisk ekvation

$$\lambda^2 - \lambda + \tfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}.$$

Alltså lösningen $x_n = (a + b \cdot n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\begin{cases} \text{Om} \quad n = 0: & 0 = (a + b \cdot 0)\left(\frac{1}{2}\right)^0 = a \\ \text{Om} \quad n = 1: & 1 = (a + b \cdot 1)\left(\frac{1}{2}\right)^1 = (a + b) \cdot \frac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

Alltså $x_n = 2 \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

22. Ledning: Se (5.15) på sida 283 i Barnett; lösningen har formen (5.19) på sida 284.