VT03
LMA100: Diskret Matematik
Göteborgs universitet
SK

Blandade övningar till 7 april

1. Visa att
$$(1+\frac{1}{5})(1+\frac{2}{5})\cdots(1+\frac{n}{5}) \geq 1+\frac{n(n+1)}{10}, n=1,2,\ldots$$

2. Vad är $\binom{n}{k}$? Ange formeln för $\binom{n}{k}$. Visa att $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ algebraiskt.

3. Bevisa formeln
$$\binom{3n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n-k}\binom{n}{k}.$$

4. Visa att
$$\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2} \quad (n \geq k+2).$$

5. Hur många olika ord får man genom att permutera bokstäverna i ordet "institutionen"? I hur många av dessa ord står de tre "n":en inte tillsammans?

6. Bestäm koefficienten för x^{21} i binomialutvecklingen av $(x^3+3)^{15}$.

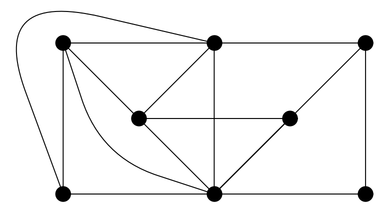
7. Ange alla kodord i koden med kontrollmatrisen
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Tag samma kod som i uppgift 7. Avgör vilka av följande ord som är kodord och om de inte är kodord, rätta dem inder antagandet att endast ett fel har uppstått: (a) 1111111 (b) 1110000 (c) 1000001

9. Skriv upp en kontrollmatris för den linjära kod som består av alla ord av längd 7 med jämnt vikt.

10. Vilken graf kallas för fullständig? Ge ett exempel av en fullständig graf.

11. Bestäm det kromatiska talet för grafen



12. En viss PIN-kod består av fyra tecken, som vart och ett är en av de 26 bokstäverna A - Z eller en av siffrorna 0 - 9.

    a) Hur många olika PIN-koder kan bildas om alla fyra tecken måste vara olika?

    b) Hur många finns det om tecken får upprepas i koden och den börjar med en bokstav?

    c) Hur många finns det med en 1:a och en 2:a och två olika bokstäver?

13. Från en grupp om 120 personer ska väljas en styrelse om 5 personer. Personerna A och B ställer som vilkor att om en av dem väljs, så ska båda väljas. På hur många olika sätt kan då styrelsen sammansättas?

14. Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2)2^k = -2 + 2^{n+1}(n^2+1)$$
för $n = 1, 2, 3 \ldots$.

15. Hur många arrangemang av siffrorna 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 finns det, om den första siffran skall vara större än 1 och den sista mindre än 8?

16. Hur många n-siffriga tal kan man bilda med hjälp av siffrorna 1 oooch 2, omm talen skall inehålla minst en etta och minst en tvåa? ($n \geq 2$.)

17. Bland Uppsalas 149300 invånare finns det en grupp på minst ..?.. personer, som har samma sista fyra siffror i personnumeret.

18. Betrakta koden $C = \{(010100), (111000), (011010), (101010)\}$. Är C linjär? Vad har C för vikten? minimiavståndet? Hur många fel upptäcker den? korrigerar?

19. Den n-dimensionella kuben Q_n är den graf, vilkens noder kan beskrivas med “ord” av formen $a_1 a_2 \cdots a_n$, där var och en av a_k är en nolla eller etta, och de kanter som finns med i kuben är precis de som förbinder noder som skiljer sig åt på ett ställe i sina beskrivningar.

a) Rita en bild av 4-kuben Q_4!

b) Bestäm antalet noder i den n-dimensionella kuben Q_n.

Facit

2. $\binom{n}{k}$ är antalet kombinationer, dvs. antalet sätt att välja k element bland n givna oavsett från ordningen mellan de valda element. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

5. Det finns $\frac{13!}{3!3!3!} = 28828800$ ord; de tre “n”:en står inte tillsammans i

$$28828800 - 11 \cdot \frac{10!}{3!3!} = 28828800 - 1108800 = 27720000$$

ord.

6 Koefficienten är $\binom{15}{7}3^8$.

7. *Lösning.* H ger följande ekvationer:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + x_7 & = 0 \\ x_4 + x_5 + x_7 & = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_7 & = 0 \\ x_6 + x_7 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + x_4 + x_7 \\ x_5 = x_4 + x_7 \\ x_3 = x_1 + x_4 + x_7 \\ x_6 = x_7 \end{cases}$$

x_1, x_4, x_7 kan väljas godtyckliga. Sedan är x_2, x_3, x_5, x_6 entydigt bestämda. De 8 valen av x_1, x_4, x_7 ger orden

$$\{(0000000), (1111011), (0001011), (1000111), (1001100), (1110000), (0111100), (0110111)\}.$$

8. *Lösning.*

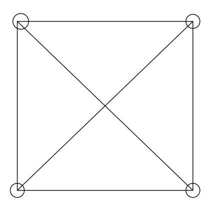
(a) Syndrom $H \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Det är fel i position 5. Rätt ord är 1111011.

(b) Syndrom $H \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Det är ett kodord.

(c) Syndrom $H \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mer än ett fel och kan inte avkodas.

9. *Lösning.* Ett ord $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ har jämnt vikt om och endast om $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 = 0$ i Z_2. Detta ger att vi kan ta $H = (1111111)$ som kontrollmatris.

10. En graf är fullständig om det finns precis en kant mellan varje par av olika noder. Ett exempel av en fullständig graf är C_4:



11. 4.

12. Vi har totalt 36 tecken att arbeta med.

a) Antalet permutationen av 4 tecken valda bland 36 är ju $P(36, 4) = 1413720$ stycken.

b) Antalet blir $26 \cdot 36^3 = 1213056$ stycken.

c) Antalet blir $2 \cdot \binom{4}{2} \cdot P(26, 2) = 7800$.

13. Antingen båda A och B är i styrelsen eller båda A och B inte är i styrelsen. Alltså svaret blir

$$\binom{118}{3} + \binom{118}{5}.$$

15. Om den första siffran är 8 eller 9, då kan vi välja den sista siffran på 8 sätt (bland siffrorna 0,1,...,7) och sedan permutera de siffrorna som är kvara på 8! sätt. Alltså har vi $2 \cdot 8 \cdot 8! = 645120$ möjligheter. Annars kan vi välja den första siffran på 6 sätt (bland siffrorna 2,3,...,7), sedan välja den sista siffran på 7 sätt (bland siffrorna 0,1,...,7 utom den första siffran), och sedan permutera de siffrorna som är kvar på 8! sätt. Alltså har vi $6 \cdot 7 \cdot 8! = 1693440$ möjligheter. Alttså totalt 2338560.

16. $2^n - 2$.

17. 15.

18. C är inte linjär eftersom bl.a. $(000000) \notin C$. Vikten är 2. Minimiavståndet är 2. C upptäcker ett fel, men kan inte korrigera fel.

19. b) 2^n.