Matematik
HC,JAS

Inga hjälpmedel

Tentaexempel 1, LMA100, del 1

1. Ur en församling på fyra danskar sex norrmän och nio svenskar skall väljas en kommitté på fem personer så att alla tre nationerna är representerade. På hur många sätt kan det göras?

2. Lös ekvationen
$$2x + \sqrt{x^2 + 1} = 3.$$

3. Hur många olika ord med

   (a) nio bokstäver,

   (b) fem bokstäver,

   kan man bilda av de nio bokstäverna i ordet *MATEMATIK* ?

4. Bestäm alla positiva heltal x och y sådana att
$$33x + 21y = 444.$$

5. (a) Hur många heltal n med $1 \leq n \leq 100$ som inte är relativt prima med 12 finns det?

6. Visa att $3^{1/3}$ är irrationellt.

7. Låt p vara ett primtal och a samt b heltal. Visa att $p \mid ab$ precis när $p \mid a$ eller $p \mid b$.

8. Ett höghusområde skall byggas. Av estetiska skäl har arkitekten bestämt att husen skall målas våning för våning i horisontella band. Endast färgerna gult och grönt skall användas och två intilliggande våningar får inte båda vara gröna. På hur många sätt kan ett åttavåningshus färgläggas?

Tentaexempel 2, LMA100, del 1

1. Visa att
$$\frac{n^{19}-n}{798}$$
är ett heltal för varje heltal n.

2. Hur många olika ord kan man bilda av de åtta bokstäverna i ordet *PASSAREN* med
   (a) åtta bokstäver?
   (b) fem bokstäver?

3. Åtta gifta par skall bilda en ring för att dansa runt midsommarstången. Hur många ringar finns det under vart och ett av följande villkor?
   (a) Inget extra villkor.
   (b) Det finns två män som vägrar hålla varandra i hand.
   (c) Ingen kvinna håller någon annan kvinna i handen.
   (d) Varje man håller sin hustru i sin högra hand.

4. Talföljden a_n definieras genom
$$a_0 = 1,\ \ a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n} \text{ när } n \geq 1.$$
Bestäm en formel för a_n och visa att den gäller.

5. Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen
$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 10$$
med $k_1 \geq 3$ och $0 \leq k_2 \leq 6$.

6. Undersök om det finns några positiva heltal n, sådana att
$$\frac{5^n-1}{4^n-1}$$
är ett heltal. Eventuella slutsatser ska bevisas för full poäng!

7. Kodord med siffrorna 0, 1, 2 och 3 är *godkända* om de innehåller ett jämnt antal nollor. Hur många godkända kodord med fyra siffror finns det?

8. Låt a och n vara heltal. Visa att a är inverterbart modulo n precis när $\mathrm{SGD}(a, n) = 1$.