Tentamen i LMA 100 , del 1, 05 01 03, kortfattade lösningar

1. Vi skriver först talen i basen tio: $a = 1 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 2 = 72$ och $b = 1 \cdot 7^1 + 4 = 11$. Därmed är $a \cdot b = 72 \cdot 11 = 792$.

   Vi har $792 = 9 \cdot 88 = 9(9 \cdot 9 + 7) = (1070)_{\text{nio}}$.

   Svar: $(1070)_{\text{nio}}$.

2. (a) Vi skall välja 4 av 15 personer. Det går på $\binom{15}{4} = 1365$ olika sätt.

   (b) Vi skall välja 2 av 9 kvinnor och 2 av 6 män. Det går på $\binom{9}{2} \cdot \binom{6}{2} = 540$ olika sätt.

   (c) Antalet ämnesgrupper med bara kvinnor är $\binom{9}{4}$, och med bara män $\binom{6}{4}$. Det sökta antalet är därför $\binom{15}{4} - \left(\binom{9}{4} + \binom{6}{4}\right) = 1365 - 141 = 1224$.

3. Subtraktion av 3 i båda leden och kvadrering ger ekvationen $3x + 1 = (x-3)^2$. Nu får vi se upp eftersom kvadrering av en ekvation kan leda till falska rötter. Vi måste pröva lösningarna(s tecken).

   Förenkling av den nya ekvationen ger $0 = x^2 - 9x + 8$. Formel för lösning av en ekvation av grad två ger nu

   $$x = 9/2 \pm \sqrt{81/4 - 32/4} = 9/2 \pm \sqrt{49/4} = 9/2 \pm 7/2.$$

   Detta betyder att $x = 8$ eller $x = 1$. Prövning ger att bara $x = 8$ löser ekvationen.

   Svar: $x = 8$.

4. Alfabetet består av 2 E och 2 L och ett av vardera M, O, D och R.

   (a) Antalet åttaord blir $\frac{8!}{2!2!} = 10080$ stycken.

   (b) Vi delar in i fall.

   (i) Antalet ord med två E och två L: Vi kan placera ut två E på $\binom{4}{2}$ sätt och sedan är platserna för L bestämda så antalet sådana ord blir $\binom{4}{2}$.

   (ii) Ord med två E och högst ett L: Vi kan placera ut två E på $\binom{4}{2}$ sätt och sedan skall vi placera ut 5 "enkla" bokstäver på 2 platser. Antalet sådana ord blir $\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 4$.

   (iii) Ord med två L och högst ett E blir på samma sätt $\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 4$.

   (iv) Antalet ord utan "dubletter": Vi skall placera ut 6 olika bokstäver på fyra platser. Det går på $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ olika sätt.

   Totalt får vi $\binom{4}{2} + 2 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 606$ ord.

5. Eftersom $6 \cdot 2 \equiv 12 \equiv 1 \mod 11$ multiplicerar vi den första ekvationen men 6 och får den ekvivalenta ekvationen $x \equiv 6 \mod 11$.

   Eftersom $5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv 1 \mod 7$ multiplicerar vi den andra ekvationen men 5 och får den ekvivalenta ekvationen $x \equiv 5 \cdot 4 \equiv 6 \mod 7$.

Vi ser nu att $x = 6$ är en lösning och eftersom 7 och 11 är relativt prima ges nu alla lösningar av $x = 6 + k(7 \cdot 11) = 6 + 77k$, där k är ett godtyckligt heltal.

Svar: $x = 6 + 77k$, där k är ett godtyckligt heltal.

6. Låt M_n vara de tal mellan 1 och 100 som är delbara med n. Antalet sådana tal, $\#M_n$, är heltalsdelen av $100/n$. Så t.ex. är $\#M_7 = 14$.

   Talen som är delbara med något av 2, 5 eller 7 är $M_2 \cup M_5 \cup M_7$. Nu gäller
   $\#\Big(M_2 \cup M_5 \cup M_7\Big) = \#M_2 + \#M_5 + \#M_7$
   $- \Big(\#(M_2 \cap M_5) + \#(M_2 \cap M_7) + \#(M_5 \cap M_7)\Big) + \#(M_2 \cap M_5 \cap M_7) =$
   $\#M_2 + \#M_5 + \#M_7 - \#M_{10} - \#M_{14} - \#M_{35} + \#M_{70} =$
   $50 + 20 + 14 - 10 - 7 - 2 + 1 = 66.$

   Så antalet tal som *inte* är delbara med 2, 5 eller 7 är $100 - 66 = 34$.

7. Formulering av satsen: Antag att p är ett primtal och att $a \not\equiv 0 \bmod p$. Då gäller att $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

   Bevis: Eftersom $a \not\equiv 0 \bmod p$ är a inverterbart modulo p. Det betyder att $ab \equiv ac \bmod p$ precis när $b \equiv c \bmod p$.

   Om vi multiplicerar vart och ett av talen $1, 2, \ldots, p-1$ med a får vi därför en ny uppräkning av samma tal modulo p. Det betyder att om vi tar produkten av alla tal i de två mängden så gäller

   $$1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv (a \cdot 1)(a \cdot 2) \cdots)(a \cdot (p-1)) \equiv a^{p-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \bmod p.$$

   Eftersom p är ett primtal är $(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdots (p-1)$ relativt prima med p och därför inverterbart modulo p. Multiplikation med inversen ger till sist $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

8. (a) Nej det går inte. Av tre tal är, enligt Dirichlets lådprincip, minst två av dem antingen båda jämna eller båda udda. I båda fallen gäller att deras summa $a + b$ är jämnt och alltså är $\frac{1}{2}(a + b)$ ett heltal.

   (b) Nej det går inte. Igen följer detta av Dirichlets lådprincip.
   Lådorna är
   L_{jj}: De punkter där båda koordinaterna är jämna.
   L_{ju}: De punkter där den första koordinaten är jämn och den andra udda.
   L_{uj}: De punkter där den första koordinaten är udda och den andra jämn.
   L_{uu}: De punkter där båda koordinaterna är udda.
   När vi lägger fem punkter i dessa fyra lådor måste någon av lådorna innehålla minst två punkter (kalla dom P och Q). Med hjälp av (a) ser vi att att mittpunkten på sträckan PQ är ett heltal.