Kortfattade lösningar till
Tentamen, LMA100, del 1,
den 19 augusti 2005

1. (a) Vi skall välja 5 personer av 13 och det går på $\binom{13}{5} = 1287$ olika sätt.

   Svar: $\binom{13}{5} (= 1287)$

   (b) Antalet kommitéer utan män är $\binom{7}{5} = 21$ och antalet utan kvinnor är $\binom{6}{5} = 6$ så det sökta antalet är $\binom{13}{5} - \binom{7}{5} - \binom{6}{5} = 1287 - 21 - 6 = 1260$.

   Svar: $\binom{13}{5} - \binom{7}{5} - \binom{6}{5} (= 1260)$

2. Olikheten ger att man ska ha $0 < x^2 - x < 6$.

   Den första av dessa ger $0 < x(x-1)$, som är gilltig när $x < 0$ och när $x > 1$.

   Den andra ger $0 > x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, som gäller när $-2 < x < 3$. Detta ger

   Svar: $-2 < x < 0$ och $1 < x < 3$.

3. (a) Både den första och sista siffran kan väljas på 2 sätt. Sedan har vi 3 siffror kvar att placera ut. Det kan göras på 3! sätt. Totalt blir det $2^2 \cdot 3! = 24$ möjligheter.

   Svar: 24

   (b) Nu är antalet val av sista siffran beroende av hur vi väljer den första.

   Om första siffran är 1 har vi 4 val för den sista siffran och 3! sätt att ordna de mellersta siffrorna. Det blir 24 olika tal.

   Om första siffran är 2, 3 eller 4 har vi 3 val för den sista siffran och 3! sätt att ordna de mellersta siffrorna. Det blir 18 olika tal i dessa fall.

   Totalt får vi $24 + 3 \cdot 18 = 78$.

   Svar: 78

4. Vi har i basen tio att $a = 7^2 + 2\cdot 7 + 3 = 66$ och $ab = 2\cdot 7^4 + 2\cdot 7 + 2 = 4818$. Detta ger att $b = 4818/66 = 73 = 8 \cdot 9 + 1 = (81)_{\text{nio}}$.

   Svar: $b = (81)_{\text{nio}}$.

5. (a) Det sökta antalet är det samma som antalet ickenegativa heltalslösningar till ekvationen $k + l + m = 5$ som är detsamma som antalet konfigurationer av typ

$$11 \big| 11 \big| 1$$

Här har vi 7 platser och 2 $\Big|$ så det finns $\binom{7}{2} = 21$ olika sätt att välja fem bollar.

Svar: 21

(b) Nu blir det sökta antalet detsamma som antalet ickenegativa heltalslösningar till ekvationen $k+l+m = 10$ med $k \leq 5$. Om vi struntar i villkoret $k \leq 5$ finns det $\binom{12}{2} = 66$ olika möjligheter. Om $k \not\leq 5$, eller ekvivalent $k \geq 6$, finns det $\binom{6}{2} = 15$ olika val. (Tag först 6 gröna bollar. Sedan skall vi dra ytterligare 4 bollar.) Så de som uppfyller $k \leq 5$ blir $66 - 15 = 51$ stycken.

Svar: 51

6. Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 931 &= 77 \cdot 12 + 7 \\ 12 &= 1 \cdot 7 + 5 \\ 7 &= 1 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Euklides algoritm baklänges ger $1 = 388 \cdot 12 - 5 \cdot 931$, så $388 \cdot 12 \equiv 1 \bmod 931$. Multiplikation med 388 i ekvationen $12x \equiv 413 \bmod 931$ ger därför $x \equiv 388 \cdot 413 \equiv 160244 \bmod 931$.

Svaret är alltså resten av 160244 vid division med 931. Eftersom $160244 = 172 \cdot 931 + 112$ har vi

Svar: $x = 112$.

7. Det behövs minst 7 tal.

Att 7 räcker följer av Dirichlets lådprincip. Bilda lådorna $L_1 = \{1, 12\}$, $L_2 = \{2, 11\}$, $L_3 = \{3, 10\}$, $L_4 = \{4, 9\}$, $L_5 = \{5, 8\}$ och $L_6 = \{6, 7\}$. När vi placerar 7 tal i dessa 6 lådor kommer minst en att innehålla 2 tal. Summan av dessa 2 tal blir 13.

Att 6 inte räcker ser vi genom t.ex. välja talen 1, 2, 3, 4, 5 och 6. Det går inte att addera två av dessa tal och få 13.

Svar: 7

8. Se läroboken.