MATEMATIK
Göteborgs universitet
LMA100 Aritmetik och algebra del 1

Repetitionsuppgifter

1. Skriv uttrycket
$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$
på så enkel form som möjligt.

2. Förenkla (så långt möjligt) följande uttryck:
$$\left(\frac{y}{x^2-y^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}\right)\left(\frac{1}{x^2-\frac{1}{y^2}}\right).$$

3. Beräkna
$$\text{a)}\ \frac{35^{15}\cdot 2^{16}}{14^{14}\cdot 25^7}\qquad \text{b)}\ \frac{6^{16}\cdot 25^7}{15^{15}\cdot 16^4}.$$

4. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen
$$4x^3+8x^2+9x+5=0.$$

5. Bestäm alla lösningar till ekvationen $x+\sqrt{x}=1$.

6. Lös ekvationen $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=2\sqrt{3-x}$.

7. Bestäm kvoten $k(x)$ och resten $r(x)$ då polynomet $p(x)=3x^5-2x^3+1$ delas med $q(x)=x^2-2x+3$. Ange också sambandet mellan p, q, k och r.

8. Bestäm kvoten $k(x)$ och resten $r(x)$ då polynomet $4x^3-3x^2+2x-1$ delas med x^2-3x+2.

9. Lös ekvationen
$$\frac{1}{2-2x}+\frac{3x+2}{2x^2-2}=\frac{x}{1-2x+x^2}.$$

10. Lös ekvationen
$$\frac{10}{x}-\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-1}{x+2}=0$$

11. Lös ekvationssystemtet
$$\begin{cases} x+y+2z &= 0\\ 2x+y+z &= 3\\ x+3y+2z &= 1.\end{cases}$$

12. Lös ekvationssystemtet
$$\begin{cases} 2x-6y+4z &= 3\\ 3x+6y+5z &= 7\\ 4x-2y+6z &= 5.\end{cases}$$

13. Bestäm koordinaterna för skärningspunkterna mellan cirkeln $x^2+7x+y^2-5y=4$ och linjen $2x+y=3$.

14. För vilka reella tal x gäller att
$$\frac{4x}{2x-3}-\frac{3x}{2x+3}>\frac{1}{2}?$$

15. För vilka reella tal x gäller att
$$\frac{9x^2+6x-8}{4-x^2}\geq 0?$$

16. Lös ekvationen $2^{x+2}-2^{x-1}=\sqrt{98}$.

17. Bestäm alla lösningar till
$$\text{a) } 2^{3x+1}=16^2 \quad \text{b)}|3x+5|=4 \quad \text{c)}|2x-4|=1.$$

18. Bestäm alla lösningar till den diofantiska ekvationen
$36x+49y=21$.

19. Bestäm alla heltal x sådana att
$$\begin{cases} x & \equiv & 3 \bmod 13 \\ x & \equiv & 4 \bmod 21 \\ x & \equiv & 5 \bmod 25. \end{cases}$$

20. Herr och Fru A bakade kakor inför julen. Fru A bakade drömmar. För varje dröm gick det åt 14 gram mjöl. Herr A, som är av en mer jordnära natur, bakade bondkakor. Till en sådan gick det åt 15 gram mjöl. När baket var klart hade det gått åt 1 kilo och 50 gram mjöl. De färdiga kakorna kunde fördelas lika i sex burkar. Hur många kakor var bakade Fru A och Herr A?

21. Visa att $6^{10n+1}-5^{11n-1}$ är delbart med 31 för varje positivt heltal n.

22. Visa att 24 delar $n^6+3n^4+12n^3+8n^2$ för varje heltal n.

23. Visa att talet
$$\frac{5^{n-1}}{24}-\frac{4^{n-2}2}{3}+\frac{3^{n-1}}{4}-\frac{2^{n-2}}{3}+\frac{1}{24}$$
är ett heltal för alla heltal $n\geq 2$.

24. Lös den diofantiska ekvationen $143x+104y=286$.

25. Bestäm alla positiva lösningar till den diofantiska ekvationen
$143x+39y=559$.

26. Hasse skall köpa kaffebröd till sitt födelsedagskalas. Han tänker köpa tre olika sorters wienerbröd som alla kostar 8 kronor styck och en sorts tårta som kostar 40 kronor styck. På hur många sätt kan han göra detta om han skall köpa minst 3 wienerbröd av varje sort och minst en tårta och hela kalaset skall kosta 200 kronor?

27. Ungefär 1.500 enkronor staplas på ett bord. När kronorna läggs i staplar med 10 kronor i varje blir det 7 stycken över, när staplarna innehåller 7 enkronor var blir det 3 kronor över och när staplarna består av 13 kronor blir det 10 över. Exakt hur många enkronor låg det på bordet?

28. Bestäm det minsta positiva heltalet x sådant att

$$\begin{cases} x \equiv 5 \mod 12 \\ x \equiv 11 \mod 23 \\ x \equiv 7 \mod 37. \end{cases}$$

29. (a) Beräkna den multiplikativa inversen till 61 mod 1789.
    (b) Lös, t.ex. med hjälp av (a), ekvationen $61x \equiv 25 \pmod{1789}$.

30. Visa att $7^{10n+1} + 6^{11n-1}$ är delbart med 43 för varje positivt heltal n.

31. Visa att 120 delar $24y^2 + 50y^3 + 35y^4 + 10y^5 + y^6$, för alla heltal y.

32. Visa att $n^3 + 3n^2 + 14n - 12$ är delbart med 6 för alla heltal n och med 12 om n är ett jämnt heltal.

33. Visa att $15 \mid n^5 + 10n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n$, när n är ett heltal.

34. Visa att ett tal $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ skrivet i bas 10 är delbart med 8 om och endast om $4a_2 + 2a_1 + a_0$ är delbart med 8.

35. Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n},$$
för alla heltal $n \geq 1$.

36. Bevisa att
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+2}{3^k} = \frac{9}{2} - \frac{5+3n+n^2}{2 \cdot 3^n},$$
för alla heltal $n \geq 0$.

37. Visa att
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{1}{2^n}(n^2+4n+6),$$
för alla heltal $n \geq 0$.

Förslag till svar:

1. $1/(x^4 - 1)$
2. $-1/x^3$
3. a) 140 b) 3/5
4. -1, $-0,5 \pm i$
5. $x = (3 - \sqrt{5})/2$
6. $(19 - \sqrt{7})/8$
7. svar: $k(x) = 3x^3 + 6x^2 + x - 16$ och $r(x) = -35x + 49$. Sambandet är $p = k \cdot q + r$ (eller $p/q) = k + r/q$).
8. $k(x) = 4x + 9$, $r(x) = 21x - 19$
9. $x = -1/3$
10. $\pm\sqrt{10}$

11. $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$

12. $x = -1,6$, $y = 0,3$, $z = 2$

13. $(1, 1)$ och $(-2, 7)$

14. $-3/2 < x - 3/14$ och $x > 3/2$

15. $-2 <\leq -4/3$ och $2/3 \leq x < 2$

16. $x = 3/2$

17. a) $7/3$ b) $-1/3$, -3 c) $3/2$, $5/2$

18. T.ex.
$$\begin{cases} x &= 15 + 49n \\ y &= -11 - 36n, \end{cases}$$
där n är ett godtyckligt heltal.

19. T.ex. $x = 130 + 5775n$.

20. Fru A bakade 30 kakor och Herr A 42.

23. Tips: Det räcker att visa att 8 och 3 delar uttrycket för varje n. Gör detta genom att räkna modulo 8 och modulo 3 och sätta upp tabeller över uttryckets värde modulo 8 och modulo 3. (Vid räkning modulo 8 räcker det att sätta in talen $0, 1, \ldots, 7$ och räkna ut värdet modulo 8.)

24. T.ex.
$$\begin{cases} x &= 66 + 8n \\ y &= -88 - 11n, \end{cases}$$
där n är ett godtyckligt heltal.

25. $x = 2$ och $y = 7$ är enda positiva lösningen (både x och y positiva).

26. Tips: Lös först den diofantiska ekvationen $8x + 40y = 200$. Den har två positiva lösningar. Beräkna sedan (kombinatorik) på hur många sätt Hasse kan köpa wienerbröd i de två fallen. Svar: 81 sätt.

27. 1557 kronor.

28. $x = 9257$.

29. a) 88 b) t.ex. $x = 411 + 1789n$, där n är ett godtyckligt heltal.

JAS