Kortfattade lösningar till Tentamen,
LMA100, del 1

1. Ommöblering, gemensamt bråkstreck och faktorisering ger att vi ska lösa

$$\begin{aligned} 0 &< 2x - \frac{x^2-1}{x+2} = \frac{2x^2+4x-(x^2-1)}{x+2} = \frac{x^2+4x+1}{x+2} = \\ &= \frac{(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{x+2} = f(x). \end{aligned}$$

Vi gör en tabell över faktorernas teckenväxlingar:

		$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$	
$x+2+\sqrt{3}$	-	0	+		+		+
$x+2-\sqrt{3}$	-		-		-	0	+
$x+2$	-		-	0	+		+
$f(x)$	-	0	+	e d	-	0	+

Vi avläser tabellen och får svaret

Svar: $-2-\sqrt{3} < x < -2$ och $-2+\sqrt{3} < x$.

2. (a) Om vi betraktar de båda G och O som olika kan vi bilda 6! ord. Men de olika orden blir ”samma” när vi permuterar G och O så vi får $6!/2!2! = 180$ ord.

   (b) Den bokstav som inte är med kan antingen vara en ”dubbel” (G eller O) eller en ”enkel” (L eller E). I första fallet kan bokstaven som väljs bort väljas på 2 sätt så det finns $2 \cdot \dfrac{5!}{2!} = 5! = 120$ ord. I det andra kan vi välja bort bokstaven på 2 sätt och får $2 \cdot \dfrac{5!}{(2!)^2} = \dfrac{5!}{2} = 60$. Totalt finns det alltså $120 + 60 = 180$ ord.

   Anmärkning. Svaret på (a) och (b) är det samma. Detta kan man se direkt genom att avbilda ett ”6-ord” på ett ”5-ord” genom att stryka sista bokstaven. Inversen till denna avbildning ges av att till ett ”5-ord” lägga till den bokstav som inte finns med som sista bokstav. Vi har alltså en bijektion mellan ”6-ord” och ”5-ord”, så de är lika många.

3. Vi stätter $t = 2^{x-3}$ och har därför att $t > 0$. Vi får ekvationen $t - 1 = 3 \cdot 2^2 t^{-1}$. Multiplikation med $t(> 0)$ ger den ekvivalenta ekvationen $0 = t^2 - t - 12 = (t-4)(t+3)$ som har lösningarna $t = 4$ och $t = -3$. Eftersom $t > 0$ är bara $t = 4$ aktuellt.

   Detta ger $2^{x-3} = t = 4 = 2^2$. Av detta ser vi (eftersom 2^{x-3} är strängt växande) att $x - 3 = 2$, så $x = 5$.

   Svar: $x = 5$

4. (a) Antalet sätt att fördela 6 apelsiner på fem personer är samma som antalet konfigurationen av typ

   $$11||11|1|1\ .$$

   Här har vi sex ettor och fyra streck så det går på $\binom{10}{4} = 210$ olika sätt. På liknande sätt ser vi att äpplena kan fördelas på $\binom{8}{4} = 70$ olika sätt. Totalt får vi $210 \cdot 70 = 14700$ olika sätt att fördela frukterna.

   (b) Vi delar in i fall efter hur många äpplen personerna får.

   I. Två personer får två äpplen var. Dessa personer kan väljas på $\binom{5}{2} = 10$ sätt. Sedan får de tre andra personerna tre apelsiner var (inget val). Så det går på 10 sätt.

   II. En person får två äpplen och två personer ett var. Personen som får två äpplen kan väljas på 5 sätt och de två som skall ha ett äpple kan väljas på $\binom{4}{2}$ sätt och sedan delas apelsinerna ut så att alla får två frukter (inget val). Alltså $5\binom{4}{2} = 30$ olika sätt.

   III. Fyra personer får ett äpple var. Dessa kan väljas på 5 sätt och sedan har vi inget val när vi fördelar apelsinerna. Så det går på 5 sätt.

   Totalt får vi $10 + 30 + 5 = 45$ sätt att fördela frukterna så att alla får två frukter var.

5. Eftersom $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ och de tre faktorerna är parvis relativt prima räcker det att visa att uttrycket alltid delas av 3, 4 och 5. Vi gör detta genom att visa att uttrycket är 0 modulo 4, 3 och 5.

   Vi räknar modulo 4 och har då att $41n^5 + 15n^3 + 4n \equiv n^5 + 3n^3 \equiv n^3(n^2 + 1)$. En räkning ger oss tabellen

n	0	1	2	3
n^2	0	1	0	1
n^3	0	1	0	3
n^2+3	3	0	3	0
	0	0	0	0

Vi räknar nu modulo primtalet 5 och har då enligt Fermats lilla sats att $n^5 \equiv n$. Dett ger $41n^5 + 15n^3 + 4n \equiv n^5 + 4n \equiv n + 4n \equiv 5n \equiv 0$.

Vi räknar nu modulo primtalet 3 och har då enligt Fermats lilla sats att $n^3 \equiv n$. Dett ger $41n^5 + 15n^3 + 4n \equiv 2n^5 + n \equiv 2n^3n^2 + n \equiv 2nn^2 + 4n \equiv 2n^3 + n \equiv 2n + n \equiv 3n \equiv 0$.

6. Låt M_n vara de tal mellan 1 och 200 som är delbara med n. Antalet sådana tal, $\#M_n$, är heltalsdelen av $200/n$. Så t.ex. är $\#M_2 = 100$ och $\#M_5 = 40$.

   (a) Talen som är delbara med något av 2 eller 5 är $M_2 \cup M_5$. Nu gäller

   $$\#(M_2 \cup M_5) = \#M_2 + \#M_5 - \#(M_2 \cap M_5) =$$

   $$= \#M_2 + \#M_5 - \#M_{10} = 100 + 40 - 20 = 120 \ .$$

   Så antalet tal som *inte* är delbara med 2 eller 5 är $200 - 120 = 80$.

   (b) Att vara delbart med något av talen 2, 5 eller 6 är detsamma som att vara delbart med 2 eller 6. Alltså är svaret på (b) detsamma som på (a).

7. (a) Att a är inverterbart modulo n betyder att det finns ett heltal b så att $ab \equiv 1 \bmod n$.

   (b) Största gemensamma delaren till a och n kan skrivas som en kombination av a och n. Om den största gemensam delaren är 1 vet vi alltså atta det finns heltal b och c så att $1 = ab + nc$. Räknar vi modulo n ger detta $1 \equiv ab \bmod n$ och vi ser att b är en invers till a modulo n.

8. Dela in rektangeln i 12 delrektanglar med sidorna 3 cm och 4 cm genom att dela in sidan som är 9 cm i tre och sidan som är 16 cm i fyra lika långa delar. Av de tretton punkterna måste mins två hamna i samma delrektangel. Avståndet mellan dessa punkter är högst lika med diagonalen i delrektangeln som är 5 cm.