Kortfattade lösningar till Tentamen,
LMA100, del 1, den 13 april 2004

1. Division med 2 ger ekvationen $12x - 13y = 11$, som har samma lösningar som den ursprungliga.

   Ekvationen $12x - 13y = 1$ har lösningen $x = -1$, $y = -1$. Multiplikation med 11 ger att $x = -11$, $y = -11$ löser $12x - 13y = 11$.

   Eftersom 12 och 13 är relativt prima blir samtliga lösningar till den ursprungliga ekvationen
$$\begin{cases} x = -11 + 13n \\ y = -11 + 12n, \end{cases}$$
   där n är ett godtyckligt heltal.

   Svar: $\begin{cases} x = -11 + 13n \\ y = -11 + 12n \end{cases}$, där n är ett godtyckligt heltal.

2. (a) $\binom{12}{4} = 495$

   (b) Om båda ingår skall vi välja två ytterligare personer från tio och om ingen ingår skall vi välja fyra från tio. Så vi får
$$\binom{10}{2} + \binom{10}{4} = 45 + 210 = 255\ .$$

3. Man har modulo 17 att $13 \equiv -4$, $13^2 \equiv 16 \equiv -1$, så $13^4 \equiv 1$. Men $9^2 \equiv 81 \equiv 13$, så $9^8 \equiv 13^4 \equiv 1$.

   Från denna kalkyl har vi
$$13^{4n+1} - 9^{8n+2} \equiv (13^4)^n 13 - (9^8)^n 9^2 \equiv 13 - 13 \equiv 0.$$

   Detta visar att $13^{4n+1} - 9^{8n+2}$ är delbart med 17 för alla naturliga tal n

4. (a) $\frac{8!}{(2!)^3} = 5040.$

   (b) Den bokstav som inte är med kan antingen vara en ”dubbel” (T,E eller N) eller en ”enkel” (A eller M). I första fallet kan bokstaven som väljs bort väljas på 3 sätt så det finns $3 \cdot \frac{7!}{(2!)^2} = 3 \cdot 1260 = 3780$ ord. I det andra kan vi välja bort bokstaven på 2 sätt och får $2 \cdot \frac{7!}{(2!)^3} = 2 \cdot 630 = 1260$. Totalt finns det alltså 5040 ord.

Anmärkning. Man kan inse direkt att svaret på (a) och (b) är det samma.

5. Eftersom 5 är ett primtal är SGD$(5, 2^n + 2 \cdot 7^n)$ antingen 1 eller 5 beroende på om 5 inte delar respektive delar $2^n + 2 \cdot 7^n$.

   Modulo 5 gäller $2^n + 2 \cdot 7^n \equiv 2^n + 2 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^n$.

   Vi ser att talet $3 \cdot 2^n$ är faktoriserat i primtal och inget av dem är 5, så 5 delar inte detta tal.

   Alltså delar 5 aldrig $2^n + 2 \cdot 7^n$, när n är ett naturligt tal och därför är SGD$(5, 2^n + 2 \cdot 7^n) = 1$.

6. (a) Antalet lösningar är det samma somm antalet sätt att dela upp 12 ettor i tre grupper och det får vi genom att sätta ”två streck i räkningen” och det är alltså $\binom{14}{2} = 91$.

   (b) Låt $A = \{k \geq 7\}$, $B = \{l \geq 7\}$ och $C = \{m \geq 7\}$. Då gäller $\#A = \#B = \#C$. Detta antal är det samma som antalet icke-negativa heltalslösningar till ekvationen $k + l + m = 5$. Som i (a) blir detta $\binom{7}{2} = 21$. Vi observerar också att mängderna A, B och C är disjunkta. (Ligger man i minst två av mängderna blir $k + l + m \geq 14 > 12$.) Så antalet lösningar blir $N - \Big(\#A + \#B + \#C\Big) = 91 - 3 \cdot 21 = 28$. ($N$ är antalet lösningar i (a).)

7. Antag att $\sqrt{2} = a/b$, där a och b är heltal. Genom att förkorta kan vi då utgå från att a och b är relativt prima.

   Kvadrering och multiplikation av båda sidor av likheten med b^2 ger oss $2b^2 = a^2$. Detta betyder att 2 är en primfaktor i a, så $a = 2c$, för något heltal c. Detta ger $2b^2 = 2^2c^2$, eller $b^2 = 2c^2$, så 2 är även en primfaktor i b.

   Detta motsäger att a och b är relativt prima. Vi har kommit till en motsägelse utgående från antagandet att $\sqrt{2}$ är kvot mellan två heltal. Alltså kan det inte vara så, så $\sqrt{2}$ är irrationellt.

8. Detta följer av Dirichlets lådprincip. Låt $n_1, n_2, \ldots, n_6$ vara de 6 talens rest vid division med 9. Betrakta ”lådorna” $\{0\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$ och $\{4, 5\}$. Dom är 5 stycken. Så någon låda måste innehålla minst två av de 6 talen $n_1, n_2, \ldots, n_6$. Om dessa två tal är identiska så är deras skillnad 0 och speciellt delbar med 9, om de är olika så är deras summa 9 och alltså också nu delbar med 9.