Kortfattade lösningar till Tentamen,
LMA100, del 1, den 16 augusti 2004

1. Division med 2 ger ekvationen $7x - 17y = 25$, som har samma lösningar som den ursprungliga.

   Ekvationen $7x - 17y = 1$ har lösningen $x = 5$, $y = 2$. Multiplikation med 25 ger att $x = 125$, $y = 50$ löser $7x - 17y = 25$.

   Eftersom 7 och 17 är relativt prima blir samtliga lösningar till den ursprungliga ekvationen
$$\begin{cases} x &= 125 + 17n \\ y &= 50 + 7n, \end{cases}$$
   där n är ett godtyckligt heltal.

   Svar: $\begin{cases} x &= 125 + 17n \\ y &= 50 + 7n \end{cases}$, där n är ett godtyckligt heltal.

2. (a) $\frac{8!}{2!} = 20160$

   (b) Vi delar upp i två fall.

   i) Antalet ord med högst ett T är $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$.

   ii) Antalet ord med två T.
   Vi kan placera ut två T på $\binom{5}{2=10}$ sätt. Sedan skall vi placera ut RLA på de återstående sex bokstäverna på 3 platser. Det går på $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ sätt. Totalt finns det $10 \cdot 120 = 1200$ sådana ord.

   Totalt blir antalet ord med fyra bokstäver $2520 + 1200 = 3720$.

3. (a) Euklides algoritm för största gemensamma delaren till 151 och 13 ger
$$\begin{aligned} 151 &= 11 \cdot 13 + 8 \\ 13 &= 1 \cdot 8 + 5 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1. \end{aligned}$$

Baklänges ger detta

$$\begin{aligned} 1 &= 3-1\cdot 2 = 3-1\cdot(5-3) = 2\cdot 3 - 1\cdot 5 = \\ &= 2(8-5)-1\cdot 5 = 2\cdot 8 - 3\cdot 5 = \\ &= 2\cdot 8 - 3(13-8) = 5\cdot 8 - 3\cdot 13 = \\ &= 5(151-11\cdot 13) - 3\cdot 13 = 5\cdot 151 - 58\cdot 13. \end{aligned}$$

Modulo 151 ger detta $1 \equiv (-58)13$, så $-58 \equiv 93$ är invers till 13 modulo 151.

Svar: 93.

(b) Multiplicedras ekvationen med inversen till 13 får man $x \equiv 93\cdot 7$, så det gäller att beräkna resten av $93\cdot 7 = 651$ vid division med 151. Eftersom $651 = 4\cdot 151 + 47$ är svaret 47.

Svar: 47.

4. Vi ordnar först böckerna i en rad. Det kan göras på $15!$ olika sätt. Sedan sätter vi ett streck *inne* i denna rad och sätter de till vänster om strecket på den översta hyllan och resten på den understa. Strecket kan placeras på 14 olika sätt. Totalt får vi $14\cdot 15!$ olika bokhyllor.

5. När $n = 1$ är vänster led $(1+1)2^0 = 2$ och höger led $1\cdot 2^1$, så formeln stämmer när $n = 1$.

   Antag nu att $\sum_{k=1}^{p}(k+1)2^{k-1} = p2^p$. Man har då

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1}(k+1)2^{k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{p}(k+1)2^{k-1}\right) + (p+2)2^p = \\ &= p2^p + (p+2)2^p = (p+(p+2))2^p = 2(p+1)2^p = \\ &= (p+1)2^{p+1} \end{aligned}$$

   som är högra ledet i formeln när $n = p+1$.

   Induktionsprincipen ger nu att påståendet i uppgiften är bevisat.

6. Dela upp schackbrädet i 16 kvadratiska 2×2-rutor. Enligt Dirichlets lådprincip måste minst två av de 17 pjäserna hamna i samma 2×2-ruta. Dessa pjäser hamnar intill varandra.

   Ja det går. Vi kan (t.ex.) placerar en pjäs i det övre vänstra hörnet i de sexton 2×2-rutorna.

7. Modulo 13 har vi $4^2 \equiv 16 \equiv 3$, $4^3 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 12 \equiv -1$, $4^4 \equiv 4 \cdot (-1) \equiv -4$, $4^5 \equiv 4 \cdot (-4) \equiv -16 \equiv -3$, och $4^6 \equiv 4(-3) \equiv -12 \equiv 1$.

   Vi observerar att $4^2 \equiv 3$ och att därför $3^3 \equiv 4^6 \equiv 1$. Dessutom är $4^{-1} \equiv -3$ eftersom $4(-3) \equiv -12 \equiv 1$ mod 13.

   Detta ger
$$3^{4n+1} \equiv 3^{3n}3^n3 \equiv 3^n3$$
   och
$$4^{2n-1} = (4^2)^n4^{-1} \equiv 3^n(-3).$$
   Tillsammans ger detta att
$$3^{4n+1} + 4^{2n-1} \equiv 3^n3 + 3^n(-3) \equiv 0$$
   modulo 13, vilket visar att 13 alltid delar uttrycket i uppgiften.

8. (a) Dela först ut två kakor till var och en. Sedan skall de övriga 7 kakorna fördelas. Antalet sätt att göra detta är det samma som antalet icke-negativa heltalslösningar till ekvationen
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$
   eller ekvivalent antalet kombiationer av typen
$$* * | * | * * * | * \ .$$
   Här skall platserna för de tre $|$ väljas bland tio platser, så antalet blir $\binom{10}{3} = 120$.

   (b) Om vi låter x_5 vara antalet kakor som blir kvar på kakfatet är det sökta antalet det samma som antalet lösningar till
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7\ .$$
   Detta är $\binom{11}{4} = 330$.