Kortfattade lösningar till Tentamen,
LMA100, del 1

1. Sista siffran är resten vid division med 10. Man har $47^{675} \equiv 7^{675}$ mod 10 och $7^2 \equiv 9$, $7^3 \equiv 3$ samt $7^4 \equiv 1$ mod 10. Vidare är $675 = 4 \cdot 168 + 3$. Detta ger modulo 10
$$47^{675} \equiv (7^4)^{168} 7^3 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3.$$
Svaret blir alltså 3.

2. (a) Om vi betraktar de båda E och L som olika kan vi bilda $6!$ ord. Men de olika orden blir "samma" när vi permuterar E och L så vi får $6!/2!2! = 180$ ord.

   (b) Vi delar in i fyra fall.
   I.Två E och två L: Som i (a) får vi $4!/2!2! = 6$.
   II. Två E, högst ett L: Antalet sätt att placera ut E är $\binom{4}{2}$. Sedan skall vi placera ut R,L och A på två platser. Det kan göras på $3 \cdot 2$ sätt. Så vi får $\binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 36$.
   III. Två L, högst ett E: Som i II blir det 36.
   IV. Högst ett E och högst ett L: Fyra bokstäver skall placeras ut på fyra platser. Det går på $4! = 24$ sätt.

   Genom att lägga ihop de fyra falllen ser vi att totalt finns det $6 + 2 \cdot 36 + 24 = 102$ olika ord.

3. När $n = 1$ blir vänstra ledet $1/3$, medan det högra blir $3/4 - 5/12 = (9-5)/12 = 1/3$, så formeln stämmer när $n = 1$.

   Antag nu att formeln stämmer när $n = k$ (induktionsantagande). Vi ska visa att den då stämmer även när $n = k+1$. Vänstra ledet är då
$$\mathrm{VL}_{k+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \ldots + \frac{k}{3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}}.$$
   Enligt induktionsantagandet är därför
$$\mathrm{VL}_{k+1} = \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} - \frac{3(2k+3)-4(k+1)}{4\cdot 3^{k+1}} = && (2)\\
&= \frac{3}{4} - \frac{2k+5}{4\cdot 3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2(k+1)+3}{4\cdot 3^{k+1}} = && (3)\\
&= \mathrm{HL}_{k+1}. && (4)
\end{aligned}
$$

Alltså är påståendet visat med induktion.

4. Vi ger först varje barn två kolor var. Sen återstår det att fördela 6 kolor till de fem barnen. Antalet sätt är samma som antalet konfigurationen av typ

$$\{11||11|1|1\}\ .$$

Här har vi sex ettor och fyra streck så det går på $\binom{10}{4} = 210$ olika sätt.

5. Sätt $a = \underbrace{99\ldots9}_{p-1}$. Då är $a+1 = 10^{p-1}$. Enligt Fermats lilla sats är $n^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, när $n \not\equiv 0 \bmod p$.

Eftersom p inte är 2 och heller inte 5 är $10 \not\equiv 0 \bmod p$. Detta ger

$$a \equiv a+1-1 \equiv 10^{p-1}-1 \equiv 1-1 \equiv 0 \bmod p.$$

Alltså har a resten 0 vid division med p och är därför delbart med p.

6. Vi väljer ut de fem personerna som tillsammans skall ingå i de två grupperna. Det går på $\binom{10}{5}$ sätt. De tre längsta av dessa bildar den första gruppen och de två kortaste den andra. (Här har vi inget val.) Så antalet blir $\binom{10}{5} = 252$.

Vi kan räkna ut detta på ett alternativt sätt. Vi ersätter personerna med talen $1, 2, 3, \ldots, 10$ där 1 är den kortaste, 2 den näst kortaste personen osv. För $k = 3, 4, \ldots, 8$ väljer vi ut två tal som är större än k och två tal som är mindre än k. De två större talen får tillsammans med k bilda den första gruppen och de två mindre talen den andra. Det finns $10-k$ tal som är större än k och $k-1$ som är mindre än k. Så för fixt k kan vi välja grupperna på $\binom{10-k}{2}\binom{k-1}{2}$ sätt. Genom att summera ser vi antalet blir

$$\sum_{k=3}^{8} \binom{10-k}{2}\binom{k-1}{2}\ .$$

Identiten i (b) följer direkt av detta, båda leden är svar på samma kombinatoriska problem.

7. Om a är inverterbart modulo n finns ett heltal b, så att $ab \equiv 1$ mod n. Dett ger att $1 - ab$ är delbart med n, så $1 - ab = nc$, för något heltal c. Av detta följer att $1 = ab + nc$. Största gemensamma delaren till a och n delar högra ledet och därmed 1. Den är alltså 1.

   Om a och n har största gemensam delare 1 vet vi att denna kan skrivas som en kombination av a och n: det finns heltal b och c så att $1 = ab + nc$. Räknar vi modulo n ger detta $1 \equiv ab$ mod n och vi ser att b är en invers till a modulo n.

8. Ett student skall köpa drinkar för 10 euro. Han har tre sorters drinkar att välja på. En sort kostar 1 euro, en 2 euro och den tredje 3 euro. På hur många sätt kan han kombinera sina drinkar om ordningen som han dricker dem spelar roll?

   Låt d_n vara antalet sätt att inmundiga drinkar för ett värde av n euro. Då gäller för $n > 0$ att $d_{n+3} = d_{n+2} + d_{n+1} + d_n$.
   (Om den första drinken kostar 1 euro kan han sen köpa d_{n+2} drinkar, om den första drinken kostar 2 euro kan han sen köpa d_{n+1} drinkar och om den första drinken kostar 3 euro kan han sen köpa d_n drinkar.)
   Dessutom är $d_1 = 1$, $d_2 = 2$ och $d_3 = 4$. Detta ger att följden d_n börjar så här $1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274$. Antalet drinkar blev 274.

För gamla studenter:
Vårens kurs skiljer sig från tidigare år genom att kurserna
Diskret matematik och Aritmetik och algebra tenteras ihop.

Vill du tentera båda delarna gör du hela tentan.

Vill du bara tentera Diskret matematik gör du uppgifterna ????
Vill du bara tentera Aritmetik och algebra gör du uppgifterna ????
Om du bara gör en del markera detta genom att skriva Diskret matematik
resp. Aritmetik och algebra på omslaget.