Exempel på tentamensuppgifter i LMA100, del 1

Diskret matematik

1. Givet är de 7 bokstäverna i ordet APPARAT. Hur många olika ”ord” (= bokstavspermutationer) kan man bilda av dem med
   (a) 7 bokstäver
   (b) 5 bokstäver?

2. Hur många femsiffriga tal har ett udda antal 1:or?

3. Hur många positiva heltalslösningar har ekvationen
   $$x + y + z = 91,$$
   där $x \geq 10$ och $y \geq 13$?

4. Poker spelas med en vanlig kortlek som har 52 kort: 13 valörer i 4 färger. En pokerhand har 5 kort. Hur många pokerhänder
   (a) finns det?
   (b) innehåller inte två kort av samma valör?
   (c) innehåller exakt två kort av samma valör?

   Anm. Två kort av samma valör brukar kallas för ett par.

5. Femton personer ska rösta på tre kandidater. Varje person har en röst och det är inte tillåtet att lägga ner sin röst. På hur många sätt kan det inträffa att alla kandidater får lika många röster ?

6. Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen
   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24, \text{ där } 0 \leq x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5 \leq 7.$$

7. Hur många n-siffriga tal med siffrorna 1, 2, 3 och 4 har ett jämnt antal 1:or och ett udda antal 2:or?

8. (a) Visa att funktionen $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definierad av $f(m, n) = 2^m 3^n$ är injektiv.
   (b) Definiera en injektiv avbildning från $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ till $\mathbb{N}$.

9. Man har två stycken A:n, B:n, C:n och D:n. Hur många olika “meningar” med tre “ord” kan bildas med (alla) dessa bokstäver? (Ett “ord” är en sekvens av bokstäver med minst en bokstav. En “mening” är en sekvens av ord.)

10. (a) Visa att $k^2 = \binom{k}{1} + 2\binom{k}{2}$ för varje naturligt tal k.

    (b) Använd uppgift (a) och identiteten $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}$ för att beräkna

$$\sum_{k=0}^{n} (1 + 3k + 3k^2) \quad \text{då } n = 100^{100} - 1.$$

11. Visa, dels algebraiskt och dels kombinatoriskt, att

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

12. Hur många av heltalen 1, 2, 3, . . . , 100 är varken delbara med 2, 3 eller 5?

13. På hur många sätt kan 10 äpplen och 13 apelsiner delas bland 6 barn, om varje barn skall få minst ett äpple och minst en apelsin?

14. På hur många sätt kan man skriva

$$k_1 + k_2 + k_3 = 14$$

då k_i är heltal med $0 \leq k_1 \leq 4$, $4 \leq k_2 \leq 7$ och $3 \leq k_3 \leq 5$?

15. (a) En dominobricka består av två kvadratiska fält. I varje fält finns det mellan noll och sex prickar. Exempel på dominobrickor är [|⚃] och [⚄|⚄]. Hur många dominobrickor finns det? Tänk på att, till exempel, [⚀|⚃] är samma bricka som [⚃|⚀].

    (b) Hur många sätt finns det att lägga två dominobrickor i rad så att angränsande fält har lika många prickar? Två rader anses vara identiska om den ena fås från den andra genom att lägga brickorna i omvänd ordning. Till exempel anses raderna [⚃|⚄|⚄|⚀] och [⚀|⚄|⚄|⚃] vara identiska. Med andra ord vill vi räkna de rader $\boxed{u|x|x|v}$ där u, x och v tillhör $\{0, 1, \ldots, 6\}$ och $u < v$.

16. Du har en aldrig sinande tillgång till tegelstenar av följande fyra olika typer:

typ av sten	□	■	▭	▬
storlek	1×1	1×1	1×2	1×2

    (a) Hur många sätt a_n finns det att *tegla* (övertäcka) en $1 \times n$ rektangel med stenar av typ □ och ■? Till exempel finns det 8 sådana teglingar av en 1×3 rektangel, nämligen □□□, □□■, □■□, □■■, ■□□, ■□■, ■■□, ■■■; så $a_3 = 8$.

(b) Låt b_n vara antalet sätt att tegla en $1 \times n$ rektangel med stenar av typ □ och ▬. Till exempel finns det 3 sådana teglingar av en 1×3 rektangel, nämligen □□□, □▬ och ▬□; så $b_3 = 3$. Visa att $b_n = F_{n+1}$, där F_n är det $n$te Fibonaccitalet.

(c) Hur många sätt c_n finns det att tegla en $1 \times n$ rektangel med stenar av typ □, ▭ och ▬? Till exempel finns det 5 sådana teglingar av en 1×3 rektangel, nämligen □□□, □▭, ▭□, □▬ och ▬□; så $c_3 = 5$.

(d) Visa att $b_n \leq a_n$ och $b_n \leq c_n$ för varje $n \geq 1$. (Det är inte nödvändigt att ha löst (a), (b) eller (c) för att visa detta.)

17. Hur många av de ickenegativa heltalslösningarna till

$$x + y + z = 12$$

uppfyller $x \leq 3$, $y \leq 11$ och $z \leq 11$?

18. Hur många "ord" med tio bokstäver kan bildas av bokstäverna a,b och c utan att två a:n kommer efter varandra?

19. Det $n$te *Lucastalet* L_n definieras av $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ och

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad \text{för } n \geq 1.$$

(a) Finn en formel för L_n genom att lösa denna differensekvation.

(b) Visa att $L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$ för $n \geq 1$, där F_n är det $n$te Fibonaccitalet.

(c) Visa att $F_{n+1} = (L_n + L_{n+2})/5$ för $n \geq 1$.

20. Kajsa och Kalle tänker flytta ihop och finner att de behöver en bokhylla. De beger sig till ett möbelvaruhus som säljer en bokhylleserie med fyra olika typer av sektioner i tre olika färger. Dessa kan placeras vid sidan av eller ovan på varandra.

Kajsas och Kalles pengar räcker till nio sektioner. De vill att alla sektionerna ska vara olika. Hur många olika bokhyllor (som hänger ihop) har de att välja mellan?

21. Två cirkelskivor delas in i sextio lika stora sektorer. I båda skivorna färgas tjugo sektorer vita, tjugo röda och tjugo blå (på godtyckligt sätt). Visa att hur detta än görs så kan skivorna läggas ovanpå varandra (de får roteras men inte vändas) så att minst tjugo sektorer har samma färg på båda skivorna. Är tjugo bäst möjligt?

Aritmetik och algebra

1. Bestäm alla lösningar till den diofantiska ekvationen $36x + 49y = 21$.

2. Bestäm alla heltal x sådana att
$$\begin{cases} x & \equiv & 3 \bmod 13 \\ x & \equiv & 4 \bmod 21 \\ x & \equiv & 5 \bmod 25. \end{cases}$$

3. Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n},$$
för alla heltal $n \geq 1$.

4. Herr och Fru A bakade kakor inför julen. Fru A bakade drömmar. För varje dröm gick det åt 14 gram mjöl. Herr A, som är av en mer jordnära natur, bakade bondkakor. Till en sådan gick det åt 15 gram mjöl. När baket var klart hade det gått åt 1 kilo och 50 gram mjöl. De färdiga kakorna kunde fördelas lika i sex burkar. Hur många kakor var bakade Fru A och Herr A?

5. Visa att
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{6 + 4n + n^2}{2^n},$$
för alla naturliga tal n.

6. Visa att $6^{10n+1} - 5^{11n-1}$ är delbart med 31 för varje positivt heltal n.

7. Visa att 24 delar $n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2$ för varje heltal n.

8. Visa att talet
$$\frac{5^{n-1}}{24} - \frac{4^{n-2}2}{3} + \frac{3^{n-1}}{4} - \frac{2^{n-2}}{3} + \frac{1}{24}$$
är ett heltal för alla heltal $n \geq 1$.

9. Lös den diofantiska ekvationen $143x + 104y = 286$.

10. Bestäm alla positiva lösningar till den diofantiska ekvationen $143x + 39y = 559$.

11. Bevisa att
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+2}{3^k} = \frac{9}{2} - \frac{5+3n+n^2}{2 \cdot 3^n},$$
för alla heltal $n \geq 0$.

12. Visa att
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{1}{2^n}(n^2+4n+6),$$
för alla heltal $n \geq 0$.

13. Visa att 120 delar $24y^2 + 50y^3 + 35y^4 + 10y^5 + y^6$, för alla heltal y.

14. Visa att $n^3 + 3n^2 + 14n - 12$ är delbart med 6 för alla heltal n och med 12 om n är ett jämnt heltal.

15. Hasse skall köpa kaffebröd till sitt födelsedagskalas. Han tänker köpa tre olika sorters wienerbröd som alla kostar 8 kronor styck och en sorts tårta som kostar 40 kronor styck. På hur många sätt kan han göra detta om han skall köpa minst 3 wienerbröd av varje sort och minst en tårta och hela kalaset skall kosta 200 kronor?

16. Ungefär 1.500 enkronor staplas på ett bord. När kronorna läggs i staplar med 10 kronor i varje blir det 7 stycken över, när staplarna innehåller 7 enkronor var blir det 3 kronor över och när staplarna består av 13 kronor blir det 10 över. Exakt hur många enkronor låg det på bordet?

17. Visa att $7^{10n+1} + 6^{11n-1}$ är delbart med 43 för varje positivt heltal n.

18. Bestäm det minsta positiva heltalet x sådant att
$$\begin{cases} x \equiv 5 \mod 12 \\ x \equiv 11 \mod 23 \\ x \equiv 7 \mod 37. \end{cases}$$

19. Talföljden a_n definieras av
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 4 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \text{ ,när } n \geq 2. \end{cases}$$

Visa att

$$a_n = \frac{5 \cdot 3^n + (-1)^{n+1}}{4}.$$

20. Visa att $15 \mid n^5 + 10n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n$, när n är ett heltal.

21. (a) Beräkna den multiplikativa inversen till 61 mod 1789.
    (b) Lös, t.ex. med hjälp av (a), ekvationen $61x \equiv 25 \pmod{1789}$.

22. Låt k och l vara positiva heltal. Visa att
    (a) om k och l är jämna så är $9^k - 7^l$ delbart med 16.
    (b) om k och l är udda så är $9^k + 7^l$ delbart med 16.

23. Visa att ett tal $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ skrivet i bas 10 är delbart med 8 om och endast om $4a_2 + 2a_1 + a_0$ är delbart med 8.

24. Avgör om följande utsaga är sann eller falsk:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \;\; 2|x \wedge 2|y \Rightarrow 4|(x+y) \vee 4|(x-y)$$

Formulera också dess negation så att negationssymbolen ”$\neg$” inte förekommer i svaret (”$\nmid$” får användas).

25. För godtyckliga mängder A, B rita de två mängderna

$$(A \cup B) \cap B \quad \text{och} \quad (A \cap B) \cup B$$

i var sitt Venndiagram och avgör eventuellt inklusionsförhållande dem emellan.