Avsnitt 1

Olika typer av tal

För att räkna upp, numrera, räkna antal och jämföra används ofta *naturliga tal*. Med vår vanliga decimalnotation (basen 10) skrivs dessa

$$0, 1, 2, 3, \ldots, 9, 10, 11, \ldots .$$

Samma naturliga tal kan skrivas med andra beteckningssystem. T.ex. kan de skrivas i basen 2 eller med romerska siffror:

$$\text{I, II, III, IV, V, VI, } \ldots .$$

Dessa tal kan användas för att räkna upp föremål i ordning eller för att räkna antal föremål eller för att jämföra antalet föremål i två olika samlingar av sådana.

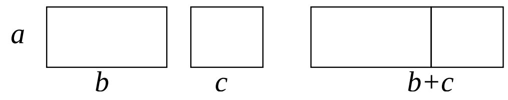
Om a och b är naturliga tal kan de adderas till ett nytt naturligt tal: $a + b$ är det totala antalet föremål i två olika samlingar av föremål där den ena har a stycken och den andra b.

Talen a och b kan också multipliceras till ett nytt naturligt tal: $a \cdot b$ är det totala antalet föremål i a olika samlingar där varje samling innehåller b föremål vardera. Vid räkning med bokstäver skrivs $a \cdot b$ vanligen ab.

Följande räkneregler gäller för addition och multiplikation:

R1	$(a + b) + c = a + (b + c)$	(associativitet)	$(ab)c = a(bc)$	(associativitet)
R2	$a + b = b + a$	(kommutativitet)	$ab = ba$	(kommutativitet)
R3	$0 + a = a$	(identitet)	$1 \cdot a = a$	(identitet)
R4	$a(b + c) = (ab) + (ac) = ab + ac$ (distributivitet)			
R5	$ab = 0$ precis när något av a eller b är $= 0$.			

För att illustrerar distributiviteten kan man rita figuren



I detta sammanhang används konventionen att om addition och multiplikation förekommer i ett och samma uttryck ska multiplikation utföras före addition. T.ex. ska $3 \cdot 5 + 2$ betyda $(3 \cdot 5) + 2$ och **inte** $3(5 + 2)$ (vilket skulle innebära att additionen utfördes före multiplikationen).

För att svara på frågan “Hur mycket mer är a än b?” kan man använda *subtraktion*. Svaret på frågan betecknas $a - b$. Här dyker självfallet problemet att a kan vara mindre än b upp. I så fall är subtraktionen inte möjlig så länge man håller sig till enbart naturliga tal.

För att svara på frågan “Hur många föremål innehåller varje hög om a föremål ska fördelas lika i b?” kan man använda *division*. Svaret på frågan betecknas a/b, men division är självfallet inte alltid möjlig, så länge man håller sig till enbart naturliga tal. Divisionen går i allmänhet inte “jämnt ut”.

Ett enkelt sätt att hantera problemet med subtraktion är att utöver de naturliga talen tänka sig att man även till varje sådant tal a har en negativ motsvarighet $-a$, med undantaget att $-0 = 0$. Man får då *heltalen*, som i decimalnotation skrivs:

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots, \pm 9, \pm 10, \pm 11, \ldots.$$

Utvidgningen av talsystemet från naturliga till hela tal görs allstå för att kunna hantera subtraktion utan restriktioner.

Additionen av de nya och gamla talen definieras nu om a och b är naturliga tal som

$$\begin{aligned} a + (-b) &= \begin{cases} a - b & \text{om} \quad a \geq b \\ -(b - a) & \text{om} \quad a \leq b \end{cases} \\ (-a) + (-b) &= -(a + b). \end{aligned}$$

Subtraktionen $a - b$ kan nu skrivas $a + (-b)$. Lägg märke till vändningen: från att ha uppfattats som en särskild operation har nu subtraktionen blivit ett specialfall av addition. De tidigare räknereglerna för addition fortsätter nu att gälla även för addition av heltal. Utöver dessa har vi nu också

R6 $a + (-a) = 0$ (additiv invers) och $-(-a) = a$.

Multiplikation av de nya och gamla talen definieras nu om a och b är naturliga tal som

$$\begin{aligned} a(-b) &= -(ab) \\ (-a)b &= -(ab) \\ (-a)(-b) &= ab. \end{aligned}$$

Motiveringen till den första definitionen är ganska enkel: om en skuld b multipliceras med a blir den nya skulden ab. Den andra kan motiveras med att om en kapital bestående av ett (stort) antal poster vardera om b kronor minskas med a poster, så görs en förlust av $-(ab)$ kronor. En liknande motivering till den tredje skulle kunna vara att om en skuld bestående av ett (stort) antal poster vardera om b kronor minskas med a poster, så görs en vinst av ab kronor.

En annan mindre intuitiv motiveringen till den tredje skulle kunna vara att den är en nödvändighet, om man vill att multiplikation av heltal alltid ska vara möjlig, och att samma räkneregler som tidigare ska fortsätta att gälla. T.ex. kan man då få

$$\begin{aligned}(-a)(-b) &= 0+(-a)(-b) = (ab+(-(ab)))+(-a)(-b) = (ab+(-a)b)+(-a)(-b) = \\ &= ab+((-a)b+(-a)(-b)) = ab+(-a)(b+(-b)) = ab+(-a)\cdot 0 = ab\end{aligned}$$

Konkret:

$$\begin{aligned}81 &= 9\cdot 9 = (10+(-1))(10+(-1)) = 10\cdot 10\cdot 10(-1)+(-1)10+(-1)(-1) = \\ &= 100-10-10+(-1)(-1) = 80+(-1)(-1),\end{aligned}$$

så man ska ha $\quad 1 = (-1)(-1).$

Denna förklaring till varför $(-2)(-3)$ ska sättas till 6 hänvisar inte till intuitionen. Motiveringen är i stället att *det måste vara så för att vissa räkneregler ska gälla*.

De tidigare räknereglerna för multiplikation fortsätter nu att gälla även för multiplikation av heltal. Likaså fortsätter distributiviteten att gälla.

Efter utvidgning från de naturliga talen till de hela talen med tillhörande räkneoperationer är alltså subtraktion inte bara alltid möjlig, utan rent av en särskild form av addition.

Även om nu problemet med subtraktion är löst återstår problemet att division inte alltid är möjlig. T.ex. är den inte möjligt att dela upp en skuld på 5 enheter i 2 lika stora poster. Divisionsproblemet är minst lika fundamentalt som subtraktionsproblemet. Inte minst för en barn är problemet att dela lika på en given kvantitet förmodligen mer konkret och viktigt än det kanske mer abstrakta skuldbegreppet.

För att lösa divisionsproblemet kan vi göra på ett liknande sätt som när vi införde negativa (hel)tal. Till varje positivt heltal a inför vi $1/a$ och tanken är att $a(1/a)$ ska vara 1.

För att konkretisera det kan vi tänka oss att a är positivt att man delar en given sträcka (av längd 1) i a lika stora delar, där var och en av delarna då får längd $1/a$. Om då b är ett naturligt tal betyder b/a längden av b stycken sådana sträckor.

Om a och c är positiva heltal gäller i så fall att

R7 $\quad cb/ca = b/a.$

För om en given sträcka delas i ca och man lägger cb sådana i följd, får man samma sträcka som om man delar den givna sträckan i a delar och lägger b av dem i följd.

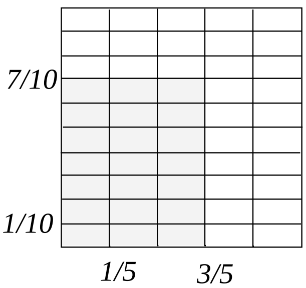
De *rationella talen* består av alla kvoter b/a där a och b är heltal och $a \neq 0$. Talet b kallas här *täljare* och talet a för nämnare. Talet b/a kallas också ett *rationellt bråk*. Observera att ett och samma rationella tal kan skrivas på oändligt många olika sätt eftersom $a/b = (ca)/(cb)$, för varje heltal c som inte är 0. (Man kan säga att det finns oändligt många "namn" på ett och samma rationella tal.)

Addition och multiplikation av sådana tal definieras enligt

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} &= \frac{ba' + ab'}{aa'} \\ \frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'} &= \frac{bb'}{aa'} \end{aligned}$$

Det är lättast att motivera dessa definitioner om vi håller oss till fallet där täljarna är ≥ 0 och nämnarna är > 0.

För att addera b/a och b'/a' kan vi först förlänga så att talen får samma nämnare: $b/a = (ba')/(aa')$ och $(ab')/(aa')$. Det först talet betyder då längden av ba' stycken sträckor av längd $1/aa'$, medan det andra betyder längden av ab' sådana sträckor. Additionen $b/a + b'/a'$ betyder då alltså längden av $ba' + ab'$ sådana sträckor, dvs $(ba' + ab')/(aa')$.



För att motivera multiplikationen kan vi tänka oss att vi har en kvadrat med given sida (av längd 1). Vi delar in basen i a och höjden i a' lika långa delar delar. Vi får då ett rutmönster i kvadraten bestående av aa' stycken lika stora rektanglar. Varje rektangel är alltså en $1/(aa')$-del av kvadraten. $(b/a)(b'/a')$ kan nu tolkas som att vi ska ha bb' sådana rektanglar, dvs $(bb')/(aa')$ delar av den ursprungliga kvadraten.

Rationella tal som kan skrivas $a/1$ skrivs normalt bara a (där a är ett heltal). På så vis är de vanliga heltalen med i systemet av rationella tal. För denna utvidgning av systemet av heltal till systemet av rationella tal och tillhörande addition och multiplikation fortsätter de tidigare räknereglerna att gälla.

Vi har dessutom

R8 $\quad \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{a}{b} = 1$ (multiplikativ invers).

För de rationella talen är både subtraktion och division (med tal $\neq 0$) alltid möjlig och i själva verket specialfall av addition respektive multiplikation.

För subtraktion har vi

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d} = \frac{ad + (-c)d}{bd}.$$

Division av a/b med $c/d \neq 0$ kan uppfattas som att vi ska lösa ekvationen $(c/d)x = (a/b)$ och vi ser, med räknereglerna ovan, att $x = (ad)/(cb)$ är lösningen. Mer konkret ser räkningarna ut så här

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \{\text{ Förlängning med } \frac{d}{c}\} = \frac{\frac{a}{b}\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\frac{d}{c}} = \\
&= \frac{\frac{ad}{bc}}{\frac{cd}{dc}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{1} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}
\end{aligned}
$$

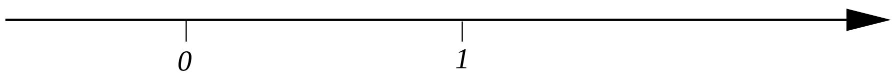
Division med $c/d \neq 0$ är alltså samma sak som multiplikation med d/c.

Det mest centrala systemet av tal i matematiken är de *reella talen*. Liksom systemen av naturliga, hela och rationella tal har det uppstått från primitiva mänskliga aktiviteter – i detta fall från mätning och jämförelse av olika typer av storheter. Det kan till exempel vara fråga om mätning av längder och avstånd och vägning av vikter.

Jämförelse av två mått A och B på en storhet (t.ex. längd) kan i sin enklaste variant gå ut på att avgöra om A är större än B eller inte. Man kan säga att det här är fråga om en kvalitativ jämförelse.

Lite mer avancerat är att göra en kvantitativ jämförelse: “Hur mycket större än B är A?”. För att besvara denna typen av frågor utgår mänskligheten från *skalor*. När en enhet på en sådan skala fastlagts blir skalan en skala av tal. Det är förstås välbekant men anmärkningsvärt, att en enda typ av skala av tal kan användas för att beskriva en stor variation av kvalitativa jämförelse: avstånd, vikt, längd, temperatur, tid osv.

Den skala av tal, de reella talen, vi använder oss av brukar illustreras med en rät linje med ett valt origo (nollpunkt), en bestämd enhetspunkt och en (positiv) riktning. Man understryker alltså de reella talens användning som avståndsskala.



Att denna skala är så fundamental beror framför allt på att den är fullständig.

Om man tänkter sig att man illustrerar de rationella talen på en längdskala på samma sätt, kommer figuren att se likadan ut som den reella skala. Mellan två rationella tal vilka som helst finns det nämligen oändligt många andra rationella tal. Ändå finns det luckor i den rationella tallinjen. En avgörande historisk upptäkt vara att längden av diagonalen i en kvadrat med sidan 1 **inte** kan mätas med ett rationellt tal. (Enligt Pythagoras sats är diagonalens längd $\sqrt{2}$ och det är ganska lätt att se att det inte finns något rationellt tal a/b vars kvadrat är 2.)

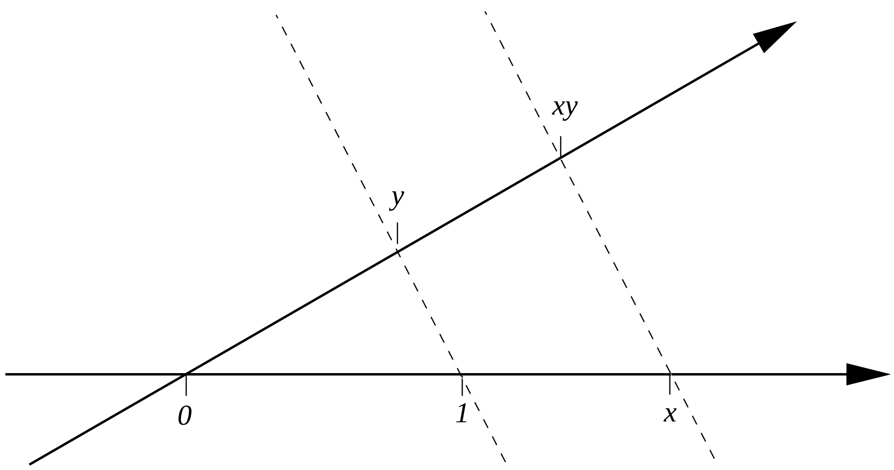
Fullständigheten hos de reella talen garanterar att den reella tallinjen inte har några sådana luckor.

När två föremål läggs i följd eller sida vid sida, är storleken av denna kombination summan av de två föremålens storlek, oavsett om det gäller deras vikt eller volym. Geometriskt bestå addition av att lägga sträckor (eventuellt med tecken eller riktning) i följd längs en linje. Denna geometriska operation motsvarar (aritmetisk) addition av reella tal.

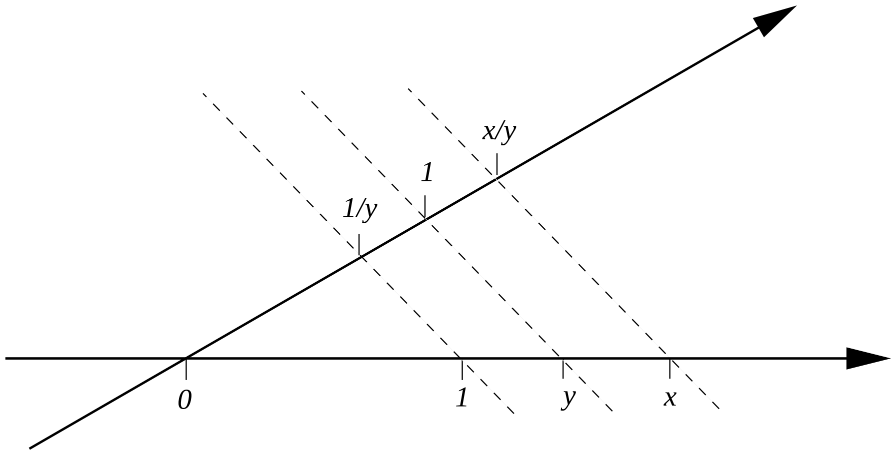
Mått på olika typer av storheter kan i första omgången lätt multipliceras med heltal– för att multiplicera vikten av ett föremål med 3 kan man ta den gemensamma vikten av tre sådana föremål. Multiplikation med rationella tal kan sedan göras med uppdelning i lika tunga delar. Multiplikation med ett reellt tal kan sedan göras med hänvisning till de reella talens “kontinuitet”. (Avgörande är att det till ett reellt tal alltid finns rationella tal godtyckligt nära det. Mer om detta nedan.)

Praktiska sätt att addera och multiplicera mått av storheter leder till (aritmetisk) addition och multiplikation av reella tal.

Som påpekats ovan kan additionen illustreras med (riktade) sträckor som läggs kant i kant. En geometrisk illustration till multiplikation av reella tal är också möjlig.



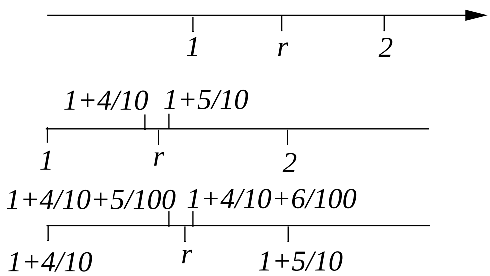
Lägg två reella tallinjer i planet så att de skär varandra i ett gemensamt origo. Markera x på den ena linjen och y på den andra. Drag sedan en linje dels genom 1 på den tallinje där x markerats, och dels genom y på den andra linjen (den streckade linjen till vänster i figuren ovan). Drag sedan en linje parallell med denna fast nu genom x (den streckade linjen till höger i figuren ovan). Denna nya linje skär då tallinjen med y i en punkt z. I figuren har det nu uppstått två likformiga trianglar (den ena inuti den andra). Likformigheten ger $z/x = y/1$ eller $z = xy$.



Liksom för det rationella talsystemet är subtraktion och division alltid möjlig och specialfall av addition och multiplikation. För att t.ex. räkna ut x/y där $y \neq 0$ och se att det är samma sak som $x \cdot (1/y)$ markerar vi först x och y på samma linje i paret av tallinjer som ovan. Sedan drar vi linjen genom y och 1 på den andra tallinjen (den streckade linjen i mitten) och kompletterar med linjer parallella med denna genom 1 och x på den första tallinjen (de två andra streckande linjerna). Likformighet ger oss att de skär den andra tallinjen i $1/y$ respektive x/y. Av figuren kan man också se att $x/y = x \cdot (1/y)$.

Än så länge har vi inte skrivit upp de reella talen med siffror på samma sätt som vi gjort med de naturliga, hela och rationella talen.

Möjligheten att göra detta bygger på egenskapen att det till ett reellt tal r finns rationella tal som ligger godtyckligt nära det (även om r inte självt är ett rationellt tal).



För att inse detta när $r > 0$ väljer vi först välja det största heltalet $a \leq r$. Då ligger r mellan a och $a + 1$ d.v.s. $a \leq r < a + 1$. Eftersom vi är vana att arbeta med namn på tal i basen 10 delar vi in sträckan från a till $a + 1$ i 10 lika delar vardera av längd $1/10$. Vi väljer det största heltal a_0 så att $a + a_0/10 \leq r$. Då ligger r mellan $a + a_0/10$ och $a + (a_0 + 1)/10$: $a + a_0/10 \leq r < a + (a_0 + 1)/10$. Vi lägger märke till att a_0 är ett heltal mellan 0 och 9, och fortsätter nu med att dela upp sträckan mellan $a + a_0/10$ och $a + (a_0 + 1)/10$ i 10 lika delar vardera av längd $1/100$ och väljer det största heltal a_1 så att $a + a_0/10 + a_1/100 \leq r$ och lägger märke till att a_1 är ett heltal mellan 0 och 9. Proceduren kan upprepas i evighet och vi får att

$$r = a + a_0/10 + a_1/100 + a_2/1000 + \cdots,$$

där a är ett heltal och $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$ är heltal mellan 0 och 9. Vårt vanliga sätt att skriva detta är

$$r = a, a_0 a_1 a_2 \ldots.$$

Vi säger att vi skrivit (eller utvecklat) r som ett (oändlig) decimaltal (decimalbråk). Det är viktigt att förstå att utvecklingen i allmänhet inte slutar med en oändlig sekvens av nollor.

Våra vanliga algoritmer för addition och multiplikation (av naturliga tal) fungerar av denna anledning inte i allmänhet för reella tal; vi har ingenstans att börja, eftersom utvecklingarna fortsätter åt höger i evighet.

I praktiken klarar vi detta genom att räkna reella tal bara med ett visst antal decimalers noggranhet. Nackdelen med detta är att då gäller inte de vanliga räknereglerna längre. Om vi t.ex. bestämmer oss för att konsekvent räkna enbart med tre decimaler har vi

$$(8000 \cdot 0,031) \cdot 0,001 = 248,000 \cdot 0,001 = 0,248$$

men

$$8000 \cdot (0,031 \cdot 0,001) = 8000 \cdot 0,000 = 0,000.$$

De rationella talen finns ju med bland de reella och det är naturligt att undra vilka decimalutvecklingar som ger rationella tal. En decimalutveckling är avslutad om den slutar med en oändlig sekvens av nollor. Normalt skriver vi förstås inte ut dessa utan skriver t.ex. $2,3245$. Varje reellt tal r med avslutad decimalutveckling är rationellt, eftersom det blir ett heltal efter multiplikation med en tillräckligt stor potens av 10. Om t.ex. $r = 2,3245$ är $r = 23245/10000$.

En decimalutveckling är periodisk om utvecklingen slutar med en oändlig upprepning av en ändlig sekvens av siffror. T.ex. är $2,3455123123123123\ldots$ periodiskt eftersom utvecklingen avslutas med en evig uppräkning av 123. Ett reellt tal r med periodisk decimalutveckling är också rationellt. Efter multiplikation med en lämplig potens (k) av 10 avslutas utvecklingen av r och $10^k r$ på samma vis, så att skillnaden $10^k r - r = (10^k - 1)r$ har avslutad decimalutveckling och därför är rationellt. Division med $10^k - 1$ ger sedan att r är en kvot mellan två heltal. Om t.ex. $r = 2,3455123123123123\ldots$ är $10^3 r = 2345,5123123123123\ldots$, så att

$$(10^3 - 1)r = 2345,5123 - 2,3455 = 2343,1668 = 23431668/10000.$$

Å andra sidan ger en decimalutveckling av ett rationellt tal (enligt den divisionsalgoritm vi känner till) alltid antigen ett avslutat eller ett periodiskt decimalbråk. Om vi t.ex. utför divisionsalgoritmen för a/b ska vi successivt utföra divisioner med b på tal som vi efter ett tag får genom att multiplicera rester vid division med 10. Det finns bara ett ändligt antal möjliga rester vid division med b så efter ett tag kommer räkningarna att upprepas och decimalutvecklingen antingen att avslutas (division med b går jämnt ut efter ett tag) eller att upprepas.

Följande räkning illustrerar att decimalutvecklingen av $7/11$:

$$
\begin{array}{r|ccc}
\multicolumn{1}{r}{} & 0, & 6 & 3 \\ \cline{2-4}
11 & 7, & 0 & 0 \\ \cline{1-1}
\multicolumn{1}{r}{} & 6 & 6 & \\ \cline{2-3}
\multicolumn{1}{r}{} & & 4 & 0 \\
\multicolumn{1}{r}{} & & 3 & 3 \\ \cline{3-4}
\multicolumn{1}{r}{} & & & 7
\end{array}
$$

Eftersom problemet att dela 7 med 11 redan har dykt upp i räkningarna vet vi nu att de kommer att upprepas och

$$\frac{7}{11} = 0,6363636363\ldots .$$

Avslutningsvis några ord om allmänna bråk. Rationella tal är som sagt de som kan skrivas som kvot mellan två heltal. Det är viktigt att uppfatta t.ex. $2/3$ som ett tal i sig och inte som en uppgift att beräkna.

Man använder också beteckningen x/y för kvoten mellan två reella tal (eller för den delen rationella tal). I sådana fall kallas x/y för ett bråktal. När man uppfattar en kvot mellan två heltal som ett rationellt tal kallas bråket för ett rationellt bråk (eller rationellt tal). De räkneregler som finns i texten ovan för rationella bråk gäller även för allmänna bråk.

ÖVNINGAR

1.1. I texten illustreras räkneregeln $a(b + c) = ab + ac$ för naturliga tal. Hur illustrerar man på liknande sätt att $ab = ba$ och att $(ab)c = a(bc)$?

1.2. Vi har en algoritm för att beräkna produkten av flersiffriga naturliga tal utgående från en multiplikationstabell för ensiffriga sådana tal. Genomför den för $127 \cdot 43$. Varför fungerar den? Vilka räkneregler använder du för att se att algoritmen fungerar?

1.3. Vi har en algoritm för att subtrahera naturliga tal. Genomför den för $431 - 279$. Varför fungerar algoritmen?

1.4. Hur avgör man om två rationella tal är lika? Hur avgör man om det ena är större än det andra?

(a) Vilka av följande rationella tal är lika? Använd inte räknedosan!

$$\frac{84}{315}, \quad \frac{322}{238}, \quad \frac{260}{975}, \quad \frac{456}{1672}, \quad \frac{759}{561}, \quad \frac{153}{561}.$$

(b) Ordna följande rationella tal i storleksordning. Börja med det minsta.

$$\frac{212}{520}, \quad \frac{173}{425}, \quad \frac{131}{321}.$$

1.5. Beräkna

$$\text{(a)}\quad \Big(\frac{1}{6}-\frac{3}{2}\Big)\Big(\frac{2}{7}+\frac{4}{3}\Big) \qquad \text{(b)}\quad \frac{\frac{4}{9}-\frac{3}{5}}{\frac{4}{3}+\frac{7}{5}} \qquad \text{(c)}\quad \frac{35}{9}\Big(\frac{6}{7}-\frac{3}{5}\Big).$$

Svara på så enkel form som möjligt.(Känner du dig osäker på denna uppgift bör du gå till baka till dina tidigare läroböcker och repetera!)

1.6. Följande misstag i räkningar är inte ovanliga:

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$$
$$\frac{ab}{a+c} = \frac{b}{c}$$

Vilka missuppfattningar ligger bakom dem? För vilka tal a, b och c stämmer de?

1.7. Priset på en vara stiger en vecka med 20% för att veckan efter sjunka med 7%. Hur många procent har varans pris stigit under de två veckorna? Vad händer om priset sjunker 7% under första veckan och sedan stiger 20% under den andra?

1.8. I texten illusteras multiplikation av reella tal geometriskt. Kan man använda geometri för att illustrera att

$$yx = yx$$

och

$$x(y+z) = xy + xz?$$

1.9. Skriv följande tal på decimalform (utan att använda räknedosa).

$$\text{(a)}\quad \frac{7}{9} \qquad \text{(b)}\quad \frac{2}{13} \qquad \text{(c)}\quad \frac{21}{5} \qquad \text{(d)}\quad \frac{23}{11}.$$

1.10. Skriv följande tal som rationella bråk.

(a) 0,237
(b) $0,237373737\ldots$ (periodiskt)
(c) $34,1243243\ldots$ (periodiskt)

1.11. Avgör om det givna rationella talet är större eller mindre än $\sqrt{3}$. (En räknedosa kan vara till hjälp, men håll dig till heltal!)

(a) $\dfrac{313}{179}$ (b) $\dfrac{151}{87}$ (c) $\dfrac{71}{41}$

1.12. Bestäm de tre första decimalerna i decimalutvecklingen av $\sqrt{3}$. (Räknedosa kan var till hjälp, men använd metoden i texten. Knappa inte in $\sqrt{3}$ direkt!)

1.13. Ange en decimalutveckling av ett reellt tal som garanterat inte är rationellt.

1.14. Finns det alltid ett rationellt tal mellan två olika reella tal? Varför?

1.15. I texten hävdas det att det mellan två olika rationella tal alltid finns oändligt många andra rationella tal. Varför stämmer det? Stämmer det också att det mellan två olika reella tal finns oändligt många olika rationella tal?

Några frågor att fundera vidare kring

1. Vilket (om något) är problemet med att subtraktion och division mellan naturliga tal inte alltid är möjlig? Vilket av problemen är mest konkret? I vilken ordning tas de upp (och löses) i skolan?

2. Hur förklaras räkneregler i skolundervisningen? Hur tas problemet med multiplikation av två negativa tal upp?

3. I vilka sammanhang används de olika typerna av tal? Hur använder du själv dem? Hur hanterar du själv negativa tal och bråk i det dagliga livet?

4. Är det bättre eller sämre att skriva om rationella tal i decimalform? När kan det vara bra att göra det? När är det inte bra?