

LMA100, Diskret matematik

Lektion 9

Rekursion

Övningar

Lös följande differensekvationer

1.
$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n, & n = 0, 1, 2, \dots \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n, & n = 0, 1, 2, \dots \\ a_0 = a_1 = 2 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, & n = 0, 1, 2, \dots \\ a_0 = a_1 = 2 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, & n = 0, 1, 2, \dots \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, & n = 0, 1, 2, \dots \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$$

6. En gräshoppa skall hoppa upp för en trappa med tio trappsteg. Gräshoppan hoppar antingen upp ett eller två steg i taget. På hur många sätt kan gräshoppan hoppa upp för trappan?

Ledning. Bestäm en rekursionsekvation för antalet sätt som gräshoppan kan hoppa upp för en trappa med n steg.

7. Samma som Uppgift 6 men nu kan gräshoppan hoppa ett, två eller tre steg åt gången.

8. Hanois torn, se sista sidan.
9. Dra n räta linjer på ett papper så att varje par av linjer skär varandra men så att ingen punkt ligger på mer än två linjer.
 Härled en rekursionsrelation för antalet områden som linjerna delar in pappret i.
 Hur många områden blir det om man drar sju sådana linjer?
 Verifiera att antalet områden man får när man drar n linjer är $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$
10. Rita n cirklar på ett papper som alla skär varandra (men så att inga tre cirklar har någon gemensam skärningspunkt).
 Härled en rekursionsekvation för antalet områden som cirklarna delar in pappret i.
 Hur många områden blir det om man ritar sju cirklar?

Förslag till svar:

1. $a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$
2. $a_n = \frac{1}{5}(2 \cdot 4^n + 3(-1)^n)$
3. $a_n = 2$ för alla n
4. $a_n = +n$
5. $a_n = 2^n - 1$
6. 55
7. 274
8. (a) 31 (b) Ja, $2^n - 1$. (c) 1023 förflyttningar. (d) $2^{64} - 1 \approx 1,8 \times 10^{19}$
 Om det tar en sekund per förflyttning blir det c:a $5,85 \times 10^{11}$ år.
 (e) C:a $1,8 \times 10^{10}$ sek \approx 585 år.
9. $a_{n+1} = a_n + n + 1$, 29
10. $a_{n+1} = a_n + 2n$, 44