Övningshäfte 2: Komplexa tal

Övningens syfte är att bekanta sig med **komplexa tal**. De komplexa talen, som är en utvidgning av de reella talen, kom till på 1400–talet då man försökte lösa kvadratiska ekvationer som t ex $x^2 + 1 = 0$, $x^2 - 2x + 2 = 0$ osv. Man kände redan till existensen av en allmän formel för kvadratiska ekvationer:

$$x^2 + px + q = 0$$

har två reella lösningar (hur får man det?)

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{och} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

om bara **diskriminanten** $\Delta = p^2 - 4q \geq 0$ (om $\Delta = 0$ så är uttrycket under rottecknet i lösningarna lika med 0 så att det finns en så kallad **dubbelrot** $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$).

Om man t ex försöker lösa ekvationen $x^2 - 2x + 2 = 0$ i enlighet med dessa formler så får man

$$x_1 = 1 - \sqrt{-1}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{-1}.$$

Detta verkar vara meningslöst, men om man betecknar $\sqrt{-1} = i$, accepterar att $i^2 = -1$ och sätter in t ex x_1 i ekvationen så får man

$$\text{V.L.} = (1-i)^2 - 2(1-i) + 2 = 1 - 2i + i^2 - 2 + 2i + 2 = 0 = \text{H.L.},$$

dvs x_1 satisfierar ekvationen. Även x_2 är en ”lösning”. Observera att vi inte bara har accepterat symbolen i och dess egenskap $i^2 = -1$, utan också de vanliga räknelagarna för ”de gamla talen” i samband med t ex kvadrering. Under 1400-talet och i början av 1500-talet började man lösa kvadratiska ekvationer och även ekvationer av högre grad med dessa nya tal. Tänk dig ett barn som endast känner till de naturliga talen och plötsligt kommer i kontakt med ett problem som leder till ekvationen $2x = 1$ (att dela något i två lika delar). Då dyker ett behov upp av ett nytt tal $\frac{1}{2}$. Det var ungefär samma situation, fast på en mer avancerad nivå, som ledde till komplexa tal.

Det tog drygt 300 år innan man kom underfund med en helt tillfredsställande definition av de komplexa talen som från början definierades som: uttryck på formen

$$a + bi, \quad \text{där} \quad a, b \in \mathbb{R} \ \text{ och } \ i^2 = -1.$$

Talet a kallas vanligen **realdelen** och b **imaginärdelen** av z. Vi bekantar oss med den formella definitionen i avsnittet om ”Talsystem”. I detta avsnitt kommer vi att arbeta med komplexa tal precis som man har arbetat med dessa tal under flera hundra år genom att acceptera definitionen ovan.

Observera att två komplexa tal $a + bi$ och $c + di$ betraktas som lika då och endast då $a = c$ och $b = d$. Man utför addition, subtraktion och multiplikation på precis samma sätt som för vanliga reella tal – det enda som tillkommer är villkoret $i^2 = -1$. Om $c + di \neq 0$ bildar man kvoten $\frac{a+bi}{c+di}$ som produkten av $a + bi$ med $\frac{c-di}{c^2+d^2}$ eftersom $(c + di)(c - di) = c^2 + d^2$. Syftet med denna övning är att bekanta sig med de grundläggande egenskaperna hos de komplexa talen:

- de fyra räknesätten,
- konjugat och absolutbelopp,
- geometrisk tolkning av komplexa tal,
- polär framställning,
- lösning av ekvationer: kvadratiska och binomiska,
- enhetsrötter.

Vi följer Kapitel 6 i Vretblads bok. (Uppgiftssiffrorna inom parentes syftar på en äldre version av boken.)

Övning A

1. Lös följande uppgifter i Vretblads bok: 6.1 (601), 6.2 (602), 6.6 (605).
2. Låt $z_1 = a_1 + b_1 i$ och $z_2 = a_2 + b_2 i$ beteckna två komplexa tal. Hur definieras summan $z_1 + z_2$, skillnaden $z_1 - z_2$, produkten $z_1 z_2$ och kvoten $\frac{z_1}{z_2}$ (här antas $z_2 \neq 0$)? Skriv ut definitionerna med ledning av texten ovan eller avsnitt 6.2 i Vretblads bok.

Övning B

1. Låt $z = a + bi$. Vad menas med det konjugerade talet $\bar{z}$ (se avsnitt 6.2 i Vretblads bok).
2. Låt $z = 3 + 5i$. Beräkna $\bar{z}$.
3. Låt z, z_1, z_2 beteckna komplexa tal. Bevisa formlerna:
   (a) $\overline{\overline{z}} = z$,
   (b) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
   (c) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$,
   (d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $(z_2 \neq 0)$.

Övning C

1. Låt $z = a + bi$. Vad menas med absolutbeloppet $|z|$?

2. Låt z, z_1, z_2 beteckna komplexa tal. Bevisa formlerna:

   (a) $|z|^2 = z\bar{z}$,

   (b) $|z| = |\bar{z}|$,

   (c) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

   Ledning. Kvadrera likheten och använd (a)!

   (d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2 \neq 0)$.

3. Beräkna två par av positiva heltal k, l så att $k^2+l^2 = (2^2+13^2)(5^2+8^2)$. Använd komplexa tal och (c). Kan du generalisera ditt resultat?

Övning D

Man tolkar det komplexa talet $z = a + bi$ som punkten (a, b) i ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem (se avsnitt 6.4 i Vretblads bok). Man identifierar z med punkten (a, b) – man säger ofta "punkten z" om (a, b). Ibland vill man se talet z som en vektor – oftast från $(0, 0)$ till punkten (a, b).

1. Rita ett rätvinkligt koordinatsystem och tolka geometriskt följande tal:

   (a) $z = a + bi$ och $\bar{z} = a - bi$ (försök beskriva deras läge i förhållande till varandra);

   (b) Re $z = a$, Im $z = b$ och $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Kan du se ett samband mellan $|z|$ och en känd sats?

   (c) $z_1 + z_2$ då $z_1 = a + bi$ och $z_2 = c + di$. Tolka därefter $|z_1 + z_2|$, $|z_1|$ och $|z_2|$;

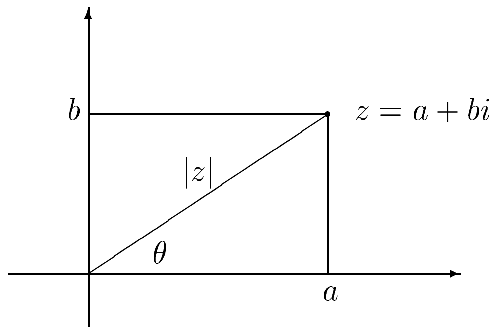
   Ledning. Summan $z_1 + z_2$ svarar mot diagonalen i den parallellogram som har sina hörn i (de punkter som svarar mot) $(0, 0)$, z_1, z_2 och $z_1 + z_2$.

2. Kan du förklara hur triangelolikheten $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ kan tolkas geometriskt med hjälp av förra uppgiften? (för ett algebraiskt bevis av denna olikhet se boken eller föreläsningsanteckningar).

3. Hur tolkas $z_1 - z_2$ då z_1 och z_2 uppfattas som vektorer från $(0, 0)$ till punkterna z_1 och z_2? Använd samma bild som i förra uppgiften. Hur tolkas $|z_1 - z_2|$? Låt $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ och skriv ut $|z_1 - z_2|$ – känner du igen en känd formel?

Övning E

1. Betrakta figuren



   och förklara varför $a = |z| \cos\, \theta$ och $b = |z| \sin\, \theta$. Vi förutsätter att $z \neq 0$.

   Anmärkning. Vinkeln θ kallas ett **argument** för z och betecknas $\theta = \arg z$. Ofta väljer man denna vinkel så att $0 \leq \theta < 2\pi$. Om θ är ett argument, så är både $\theta + 2\pi$ och $\theta - 2\pi$ argument för z. Man kan skriva

   $$z = a + bi = |z|(\cos\, \theta + i \sin\, \theta).$$

   Den sista framställningen kallas **polär form**.

2. Skriv på polär form

   (a) $z = 1 + i$,

   (b) $z = \sqrt{3} + i$.

3. Låt $z_1 = |z_1|(\cos\, \theta_1 + i \sin\, \theta_1)$ och $z_2 = |z_2|(\cos\, \theta_2 + i \sin\, \theta_2)$ vara komplexa tal på polär form. Beräkna produkten $z_1 z_2$ och kvoten $\frac{z_1}{z_2}$. Skriv dessa tal på polär form. Förklara vad som händer med beloppen och med argumenten då man multiplicerar eller dividerar två komplexa tal (se avsnitt 6.4 i boken).

4. Lös uppgift 6.18 (611) i Vretblads bok.

5. Tolka geometriskt förhållandet mellan ett komplext tal $z \neq 0$ och talet iz.

6. Om $z = |z|(\cos\, \theta + i \sin\, \theta)$, så är $z^n = |z|^n(\cos\, n\theta + i \sin\, n\theta)$, vilket kallas **de Moivres formel** (se Vretblads bok avsnitt 6.4). Lös med hjälp av denna formel uppgifterna 6.39 (628), 6.19 (612) och 6.20 a) (613 a)) i boken.

Övning F

Kvadratrötter och kvadratiska ekvationer.

1. Vad menas med beteckningen $\sqrt{-1}$? Lös ekvationen $z^2 = -1$.

   Anmärkning. Med $\sqrt{a+bi}$ menas om $b \neq 0$ eller $a < 0$ vanligen en godtycklig lösning till ekvationen $z^2 = a + bi$. (Denna ekvation har då två olika lösningar z_1 och $z_2 = -z_1$; ibland fixerar man en lösning genom lämpliga villkor. Man skriver t.ex. ofta $\sqrt{-1}$ för att beteckna talet i (och ej $-i$).) Vi skall bara använda rottecknet i samband med lösning av andragradsekvationer och då spelar denna tvetydighet ingen roll eftersom det alltid föregås av $\pm$.

2. Beräkna:

   (a) $\sqrt{3+4i}$,

   (b) $\sqrt{7-24i}$ (se boken om du vill),

   (c) $\sqrt{i}$.

3. I början av denna stencil finns allmänna formler för lösningar av kvadratiska ekvationer. Använd dessa formler för att lösa ekvationerna 6.25 (619) och 6.27 (621) i Vretblads bok.

Övning G

Binomiska ekvationer. Ekvationerna av typen $z^n = A$, där A är ett komplext tal, kallas **binomiska**. Läs om dessa ekvationer i avsnitt 6.6 i boken. Om $A = |A|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ så ges alla lösningar på formen

$$z_k = \sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + \sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right),$$

där $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

1. Lös ekvationen $z^4 = -16$. Se exempel 1 i avsnitt 6.6. Läs noga. Använd formeln ovan för att lösa denna ekvation.

2. Lös ekvationen $z^3 = 2i - 2$.

Övning H

Enhetsrötter. Lösningarna till ekvationerna $z^n = 1$ kallas **enhetsrötter**. Dessa komplexa tal har många anmärkningsvärda egenskaper och spelar en stor roll i matematiken.

1. Beräkna enhetsrötterna för $n = 2, 3, 4, 5, 6$ och tolka dessa komplexa tal geometriskt (en bild för varje n).

2. Beräkna summan av alla fjärde enhetsrötter, dvs alla lösningar till ekvationen $z^4 = 1$. Visa att ditt resultat kan generaliseras (studera enhetsrötterna i uppgiften ovan).

3. Rita enhetscirkeln i det komplexa planet och välj en godtycklig punkt a på denna cirkel. Låt z_1, z_2, z_3, z_4 beteckna lösningarna till ekvationen $z^4 = 1$. Beräkna summan av kvadraterna av avstånden mellan a och z_k, dvs summan

$$|z_1 - a|^2 + |z_2 - a|^2 + |z_3 - a|^2 + |z_4 - a|^2.$$

   Försök generalisera ditt resultat till enhetsrötterna $z^n = 1$ för godtyckliga n.

Följande övningar i Vretblads bok rekommenderas för självstudier:

Vretblad: 6.5 (603), 6.9 (606), 2.22 (616), 6.29 (622), 6.30 (623), 6.32 (625), 6.44, 6.47 (634), 6.48 (635), 6.49 (636).