Övningshäfte 4: Relationer

Övningens syfte är att bekanta sig med begreppet **relation** på en mängd M. Begreppet "relation" i matematiska sammanhang anknyter till betydelsen av samma ord i vardagliga situationer då en relation ofta är ett samband mellan två individer (dvs ett par). Den formella definitionen är följande (se också Vretblads bok avsnitt 3.2, 3.3):

(1) Definition. Med en **relation** R på en mängd M menas en godtycklig mängd bestående av par (x, y), där $x, y \in M$. Med andra ord är en relation på M en godtycklig delmängd R till den kartesiska produkten

$$M \times M = \{(x, y) : x, y \in M\}.$$

□

Om $x, y \in M$ och $(x, y) \in R$, där R är en relation på M så skriver man ofta $x \sim y$. Men " $\sim$ " ersätts oftast med andra tecken som traditionellt betecknar kända relationer t ex med " $\leq$ " eller "$|$".

Exempel. (a) Låt M vara mängden av alla elever i en skola. Vi förutsätter att skolan är av “gammal modell” så att varje elev tillhör exakt en klass. Två elever x och y är relaterade, dvs $x \sim y$, precis då x och y går i samma klass. Relationen R består i detta fall av alla par (x, y), där x och y är två elever som går i samma klass (även par (x, x) är tillåtna – x går i samma klass som sig själv!).

(b) Låt $M = \{1, 2, 3, 4\}$ och låt

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Man skriver $1 \sim 1$, $1 \sim 2$ osv. Man har sammanlagt 16 par (x, y) i $M \times M$, men endast 8 par ingår i relationen R. Relationen R är helt enkelt delbarhetsrelationen på mängden M, dvs $x \sim y$ precis då $x|y$.

(c) Låt $M = \mathbb{R}$ vara mängden av de reella talen. Definiera $R = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset M \times M$. Relationen R är helt enkelt grafen av funktionen $f(x) = x^2$, dvs den består av alla punkter på parabeln $y = x^2$. Här har vi $x \sim y$ precis då $y = x^2$.

Ett helt allmänt relationsbegrepp är inte särskilt användbart, men i matematiska situationer använder man i synnerhet vissa relationer som satisfierar vissa ytterligare villkor. Vi kommer här bara att diskutera **ekvivalensrelationer** med därtill hörande **ekvivalensklasser** och **partitioner**. Dessa behandlas även i Vretblad 3.3. Andra intressanta klasser av relationer är **ordningsrelationer** och **funktionsgrafer**.

(2) Definition. En relation "$\sim$" på en mängd M kallas för en **ekvivalensrelation** om den uppfyller att

(r) $x \sim x$ för alla $x \in M$ (reflexivitet),

(s) $x \sim y$ implicerar $y \sim x$ för alla $x, y \in M$ (symmetri),

(t) $x \sim y$ och $y \sim z$ implicerar $x \sim z$ för alla $x, y, z \in M$ (transitivitet). $\square$

Exempel. Låt som ovan M vara mängden av alla elever i en skola och låt två elever x och y vara relaterade, dvs $x \sim y$, precis då x och y går i samma klass. Man kontrollerar utan svårigheter att "$\sim$" är en ekvivalensrelation på M: $x \sim x$ (ty x och x går i samma klass), $x \sim y$ ger $y \sim x$ (ty om x och y går i samma klass så går y och x i samma klass), och slutligen, $x \sim y$ och $y \sim z$ ger $x \sim z$ (ty om x och y går i samma klass samt y och z går i samma klass så går x och z i samma klass).

(3) Definition. Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på en mängd M. Med **ekvivalensklassen** av $x \in M$ menas mängden

$$[x] = \{y \in M : y \sim x\}.$$

Vi har alltså $y \in [x] \Leftrightarrow y \sim x$. Man säger att x är en **representant** för klassen $[x]$. $\square$

Om M är mängden av alla elever i en skola och x är en elev, så är ekvivalensklassen $[x]$ mängden av alla elever som går i samma klass som x. Varje elev representerar sin klass. Mängden av alla klasser ger en partition av M – varje elev går i en klass och olika klasser är disjunkta. Rent allmänt definierar vi:

(4) Definition. En **partition** av en mängd M är en uppdelning av alla element tillhörande M i parvis disjunkta delmängder. $\square$

Vi visar nedan att ekvivalensklasserna till en ekvivalensrelation på M utgör en partition av M, dvs M är unionen av alla ekvivalensklasser och olika ekvivalensklasser är parvis disjunkta.

(5) Proposition. *Låt M vara en mängd med en ekvivalensrelation $\sim$.*

a. Varje element i M tillhör en ekvivalensklass, mera exakt: $x \in [x]$.

b. Två element representerar samma ekvivalensklass då och endast då de är ekvivalenta, dvs $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$.

c. Två olika ekvivalensklasser är disjunkta.

d. M är unionen av alla ekvivalensklasser.

Bevis. a. är klart ty $x \sim x$ innebär att $x \in [x]$.

b. $[x] = [y] \Rightarrow x \in [x] = [y] \Rightarrow x \sim y$. Antag nu att $x \sim y$. Om $z \in [x]$ så ger $z \sim x$ och $x \sim y$ att $z \sim y$ så att $z \in [y]$. Alltså är $[x] \subseteq [y]$. $x \sim y$ ger också $y \sim x$ som alltså ger $[y] \subseteq [x]$.

c. Om $z \in [x] \cap [y]$ så är $z \sim x$ och $z \sim y$ så att $x \sim y$ ur symmetrin och transitiviteten ($z \sim x$ ger $x \sim z$ som med $z \sim y$ ger $x \sim y$). Enligt b. är $[x] = [y]$. Detta betyder att om $[x] \neq [y]$ så saknar dessa klasser något gemensamt element z.

d. Följer direkt ur a. $\square$

(6) Följdsats. *För varje ekvivalensrelation på M gäller att ekvivalensklasserna bildar en partition av M.*

Bevis. Följer omedelbart från c. och d. i (5). $\square$.

Omvänt gäller att om M är en mängd (t ex mängden av alla elever i en skola) som är uppdelad i parvis disjunkta delmängder M_i (t ex klasser), dvs $M = \cup M_i$ och $M_i \cap M_j = \emptyset$ om $i \neq j$, så har man en ekvivalensrelation på M: man definierar $x \sim y$ då x och y tillhör samma partitionsmängd M_i.

Detta visar att ekvivalensrelationer på mängder helt enkelt är partitioner av dessa mängder. En partition är en klassifikation av mängdens element med avseende på en viss (ofta intressant) egenskap – denna egenskap är given genom en ekvivalensrelation på mängden (tänk igen på elever i en skola och deras "klassifikation" efter tillhörigheten till olika klasser).

Övningar

1. Låt M vara mängden av alla invånare i Göteborg. Betrakta följande relationer $x \sim y$ då $x, y \in M$ och avgör om de är reflexiva, symmetriska respektive transitiva relationer samt ange om de är ekvivalensrelationer.
   (a) $x \sim y$ då och endast då x och y är födda samma dag.
   (b) $x \sim y$ då och endast då x och y bor i samma stadsdel.
   (c) $x \sim y$ då och endast då x och y känner varandra.
   (d) $x \sim y$ då och endast då x och y är gifta med varandra.
2. Ge i varje exempel ovan då relationen är en ekvivalensrelation en beskrivning av alla ekvivalensklasser genom att välja en representant för varje klass.

3. Vilka av de följande relationerna på den givna mängden M är ekvivalensrelationer.

   (a) $M = \mathbb{Z}$, $x \sim y$ då och endast då $4|x - y$. Generalisera detta exempel.

   (b) $M = \mathbb{Z}_+$, $x \sim y$ då och endast då x och y har samma primfaktorer.

   (c) $M = \mathbb{Z}_+$, $x \sim y$ då och endast då xy är en kvadrat av ett positivt heltal.

   (d) $M = \mathbb{R}^2$, $(a, b) \sim (c, d)$ då och endast då $b = d$.

   (e) $M = \mathbb{R}^2$, $(a, b) \sim (c, d)$ då och endast då $a = c$ eller $b = d$.

   (f) $M = \mathbb{R}$, $a \sim b$ då och endast då $a - b$ är ett heltal.

   (g) $M = \mathbb{R}$, $a \sim b$ då och endast då $ab > 0$.

4. Ge i varje exempel ovan då relationen är en ekvivalensrelation en beskrivning av alla ekvivalensklasser genom att välja en representant för varje klass. Försök tolka ekvivalensklasserna geometriskt då sådana tolkningar är möjliga.

5. Är det sant att reflexivitet i definitionen av en ekvivalensrelation följer ur symmetrin och transitivitet enligt följande resonemang: Låt $x \in M$. Vi har att $x \sim y$ ger $y \sim x$ eftersom "$\sim$" är symmetrisk. Därmed ger transitiviteten $x \sim x$.

6. Ge exempel på mängder M och relationer som satisfierar följande villkor:

   (a) reflexiv och transitiv, men inte symmetrisk,

   (b) reflexiv och symmetrisk, men inte transitiv,

   (c) transitiv och symmetrisk, men inte reflexiv.

Följande övningar i Vretblads bok rekommenderas för självstudier:

Vretblad: 3.9 (308), 3.26 (320), 3.32 (326), [3.33 (328)].