Explorativ övning Geometri

Syftet med denna övning är att ge kunskaper om grundläggande geometriska begrepp och resultat om geometriska figurer. Vi vill också ge en uppfattning om geometri som en matematisk teori och dess uppbyggnad.

Vi skall bekanta oss med valda delar av en mycket klassisk del av geometri – euklidisk plan geometri. Euklides var en grekisk matematiker utbildad vid den Platonska Akademien i Aten och verksam i Alexandria c:a 300 f.Kr. Han samlade dåtida kunskaper i geometri och kompletterade dessa med sina egna resultat. Euklides utnyttjade både kunskaper från äldre kulturer som t ex den Babylonska och från grekiska matematiker som t ex Pythagoras och hans efterföljare (600 f.Kr till 400 f.Kr). Euklides publicerade sitt verk "Elementa" i 13 volymer som huvudsakligen ägnas just åt geometri, men innehåller också flera aritmetiska resultat (t ex beviset att det finns oändligt många primtal). Euklides försökte bygga upp en konsekvent deduktiv matematisk teori – ett antal klara förutsättningar om punkter, linjer och plan skulle kunna användas som utgångspunkt till att med hjälp av logiska resonemang härleda olika egenskaper hos geometriska figurer. Dessa förutsättningar – den euklidiska geometrins "spelregler"– kallas **axiom** eller **postulat** och gäller så kallade **primitiva begrepp** som punkter, linjer och plan samt vissa enkla geometriska figurer (som t ex sträckor och cirklar). Med utgångspunkt från axiomen försökte Euklides härleda olika egenskaper hos geometriska figurer. Han lyckades med att bevisa flera viktiga geometriska resultat.

Euklides verk är det första försöket i den mänskliga civilisationens historia att bygga en vetenskap på deduktiva grunder. Euklides böcker betraktades under flera hundra år som ett mönster för hur vetenskapliga teorier borde formas. De användes som skolläroböcker så sent som i slutet av 1800–talet. En noggrann och kritisk analys av Euklides text visade då på en del brister i hans teori vars framställning modifierades något (av bl a David Hilbert), men Euklides huvudidé lever kvar – hela matematikens uppbyggnad följer samma deduktiva principer som den euklidiska geometrins. Det har skrivits tusentals läroböcker i geometri som under en lång tid var ett av de viktigaste delarna i skolmatematiken. På 1960–talet försökte man modernisera presentationen av euklidisk geometri i skolan. Reformen var inte förberedd ordentligt både när det gällde lämpliga läroböcker och lärarnas fortbildning. Detta ledde till att den euklidiska

LMA100, vt 05

geometrin nästan försvann från kursplaner. Men geometrin har kommit tillbaka. Geometrin är en mycket viktig del av vårt vardagliga liv – en modell av geometriska former som vi finner i vår omgivning. Kunskaper om enkla geometriska figurer är lika viktiga som kunskaper om t ex talsystem och måste betraktas som en mycket viktig del av allmänbildningen. Geometrin är mycket mera intuitiv och lättare att förstå än t ex en del egenskaper hos talsystem. Man måste dock medge att en sträng uppbyggnad av euklidisk geometri är relativt komplicerad och att det finns mycket enklare exempel på matematiska teorier som ger en klarare uppfattning om hur en axiomatisk teori fungerar. Tyvärr förpassades euklidisk geometri från skolmatematiken nästan fullständigt och ersattes inte med något annat som kunde tillgodose behovet av ett bra exempel på hur man kan utveckla en riktig matematisk teori (en matematisk modell) för att studera vår omgivning.

Kompendiet ger teorins moderna uppbygnad. Den stora historiska betydelsen av Euklides verk gör det önskvärt att titta närmare på vad han själv skrivit. Euklides börjar med att definiera vad en punkt är: en **punkt** är något som inte kan delas. Vi lämnar frågan åt sidan om Euklides negativa definition av en punkt (som beskriver en egenskap som en punkt inte har) verkligen tillför någonting. En **linje** är en längd utan bredd. En linjes ändar är punkter. En **rät linje** är en linje som ligger jämt mellan punkterna på densamma. Slutligen: **parallella** räta linjer är räta linjer som, om de utdras i bägge riktningar, aldrig möts.

Grundsatserna indelas av Euklides i postulat, som är specifika för geometrin, och allmänna grundsatser (axiom). Det finns fem postulat:

1. Det fordras att man kan dra en rät linje från en punkt till en annan.
2. Att varje begränsad rät linje kan förlängas obegränsat.
3. Att man kring varje medelpunkt kan beskriva en cirkel med given radie.
4. Att alla räta vinklar är lika med varandra.
5. När en rät linje skär två räta linjer, och de båda inre vinklarna på samma sida om den skärande räta linjen är mindre än två räta vinklar, så kommer de båda räta linjerna, om de förlängas obegränsat, att skära varandra på den sida om den skärande räta linjen som de två inre vinklerna ligger.

Man kan här lägga märke till att inget sägs om entydigheten i första postulatet. Euklides verkar förutsätta detta. Vad som helt saknas är ordningsrelationen, att en punkt på en linje ligger mellan två andra eller ej, och att en linje delar planet i två delar. Här litar han på figurer. Begreppet kongruens förekommer inte heller. Slutligen saknas linjernas s k fullständighet, att punkterna på en linje entydig svarar mot reella tal, som behövs t ex för att visa existens av skärningspunkter mellan två cirklar.

Vi nämnar också de allmänna grundsatserna:

1. De, som är lika med ett och samma, är också lika med varandra.

2. Om lika adderas till lika, är de hela lika.
3. Om lika subtraheras från lika, är resterna lika.
4. De, som täcker varandra, är lika med varandra.
5. Det hela är större än delen.

I den första svenska översättningen av Mårten Strömer (1744) lyder fjärde axiomet: *[Congruenta]*, d.ä. de, som till alla delar träffa in med hvarandra, *eller passa tillhopa, när det ena lägges på det andra* äro lika stora. Den kursiva texten är Strömers tillägg.

Att lägga en figur på en annan använder Euklides i sitt bevis för första kongruensfallet. Det är ett helt naturligt argument, som före hans tid ofta användes, men som Euklides tydligen inte gillar. Han använder detta i brist på bättre. Lösningen är att anta satsen som axiom, som kompendiet gör, eller att ta förflyttningen som ett grundbegrepp i teorin.

Euklides första proposition är:

Att på en given sträcka konstruera en liksidig triangel.

Sen följer:

Att från en given punkt konstruera en sträcka lika med en given sträcka.

In princip använder Euklides en kollapsande passare, som slår ihop när den lämnar pappret, men satsen visar att man får samma konstruktioner som med en vanlig, styv passare, som behåller utslaget när den lyfts upp ur pappret.

Proposition 4 är första kongruensfallet, andra kongruensfallet är innehållet av proposition 8 och I.26 ger 3:a fallet. Pythagoras sats är Proposition 47.

Sista och trettonde boken handlar om de fem regelbunda Platonska kroppar.

De viktigaste begreppen och satser i detta avsnitt är:

- Kongruens och likhet mellan sträckor, vinklar och trianglar.
- Kongruensfallen för trianglar.
- Parallella linjer (likbelägna vinklar och alternativvinklar).
- Yttervinkelsatsen, vinkelsumman i en triangel.
- Längd och area.
- Likformighet av trianglar och likformighetsfallen.

- Pythagoras sats.
- Några viktiga satser om trianglar (bisektriser, medianer, höjder).
- Konstruktioner med passare och linjal.

Vi skall också utnyttja kunskaper från detta avsnitt för att få bättre förståelse av vad man menar med deduktiv vetenskap och axiomatisk metod i matematiken.

Vi följer Bo Stenströms kompendiet "Euklidisk geometri". I första hand försök lösa uppgifterna **A, B, C, D, E, G, H, J, K, M, P, Q, R**.

Övning A

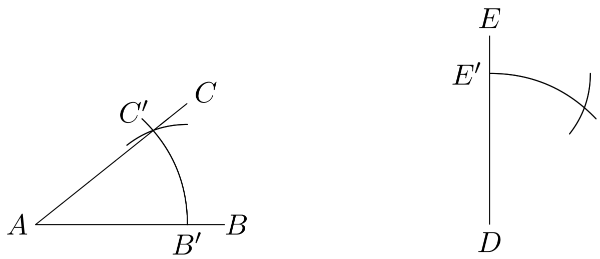
Läs texten om "Axiom och primitiva begrepp" i kompendiet (sid. 1 och 2). Försök därefter besvara följande frågor och diskutera svaren i din grupp:

1. Hur kan man föreställa sig en axiomatisk teori? Vad är ett primitivt begrepp? Vad är ett axiom? Försök svara på dessa frågor genom att jämföra axiomatisk teori med ett spel t ex schack. Vad är "primitiva begrepp" i schackspel? Vad är axiomen?
2. Ge exempel på några definitioner (t ex av några geometriska figurer eller parallella linjer). Vilken roll spelar definitionerna och varför är de viktiga? Försök svara på dessa frågor genom att jämföra definitionerna med förklaringar av ord i ett främmande språk (eller främmande ord i svenskan).
3. Vad är skillnaden mellan axiom och satser? Ge exempel på ett axiom och ett exempel på en sats.

Övning B

Syftet med uppgiften är att konstruera trianglar med givna sidor eller vinklar. Det underlättar att använda en markerad linjal och gradskiva. Det går också att bara använda passare och linjal, och en given vinkel på 39° och fyra sträckor, 2, 4, 5 och 7 cm.:

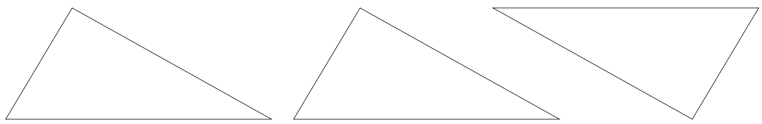
Axiom 2 i kompendiet säger att man, givet en sträcka AB och en stråle $\overrightarrow{CE}$, kan konstruera en sträcka CD på strålen $\overrightarrow{CE}$ som är lika lång som AB. Detta görs enkelt med en passare. Lite svårare är konstruktionen enligt Axiom 4: givet en vinkel $\angle BAC$ och en stråle $\overrightarrow{DE}$, konstruera på en given sida om $\overrightarrow{DE}$ en vinkel med spets D och en ben på $\overrightarrow{DE}$, som är kongruent med $\angle BAC$. Börja med att dra en cirkel med godtycklig radie om A, som skär strålen $\overrightarrow{AB}$ i B' och $\overrightarrow{AC}$ i C'. Dra en cirkel om D med radie $\overline{AB'}$ och låt E' vara skärningspunkten med strålen $\overrightarrow{DE}$. Bestäm nu skärningspunkten av cirkeln om D med cirkeln med medelpunkt E' och radie $\overline{B'C'}$.



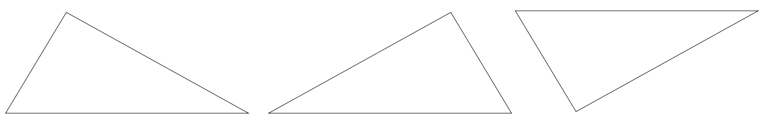
1. Konstruera med passare och linjal en liksidig triangel med sidolängd 4 cm.
2. (S–V–S) Konstruera en triangel $\Delta\, ABC$ med $\angle A = 39°$, $\overline{AB} = 5$ cm och $\overline{AC} = 4$ cm.
3. (V–S–V) Konstruera en triangel $\Delta\, ABC$ med $\angle A = 39°$, $\overline{AB} = 5$ cm och $\angle B = 45°$.
4. (V–V–S) Konstruera en triangel $\Delta\, ABC$ med $\angle A = 39°$, $\overline{AB} = 5$ cm och $\angle C = 45°$.
5. (S–S–S) Konstruera en triangel $\Delta\, ABC$ med $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 4$ cm och $\overline{BC} = 2$ cm. Går det att konstruera en triangel med $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{AC} = 4$ cm och $\overline{BC} = 2$ cm?
6. (S–S–V) Konstruera en triangel $\Delta\, ABC$ med $\angle A = 45°$, $\overline{AC} = 4$ cm och $\overline{CB} = 3$ cm. Vad händer om i stället $\overline{CB} = 5$ cm; och om $\overline{CB} = 2$ cm?

Övning C

1. Vad menas med att två trianglar är lika? När säger man att två trianglar är kongruenta?
2. Är följande trianglar lika? Är de kongruenta?



3. Samma fråga som ovan om trianglarna:



4. Vad är skillnaden mellan de båda fallen ovan?
5. Vad behöver man veta enligt definitionen av kongruensbegreppet mellan trianglar för att kunna konstatera att två trianglar är kongruenta? Är det nödvändigt att alla villkor i definitionen (6 stycken) gäller? Vilken information räcker för att sluta sig till att två trianglar är kongruenta?

6. Försök definiera kongruensbegreppet för fyrhörningar. Formulera dina egna "kongruensfall" för två fyrhörningar (tänk inte för länge på uppgiften).

Övning D

Denna övning handlar om parallellogrammer.

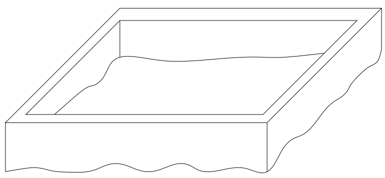
1. Vet du vad en parallellogram är? Jämför dina tankar med Exempel 2 på sid. 7 i kompendiet.
2. Visa att motstående vinklar i en parallellogram är kongruenta.
3. Visa att motstående sidor i en parallellogram är kongruenta.
4. Visa att om alla vinklar i en fyrhörning är räta, så är fyrhörningen en parallellogram (en sådan parallellogram kallas för rektangel).
5. I parallellogrammen $ABCD$ är $\angle A$ rät. Visa att $ABCD$ är en rektangel.
6. Visa att om i en fyrhörning motstående sidor är lika stora, så är fyrhörningen en parallellogram.
7. Visa att diagonalerna i en parallellogram delar varandra mitt itu.

Övning E

Lös uppgifterna 1, 2, 4 och 6 i kompendiet på sid. 17.

Övning F

Många människor (alla snickare) vet hur man genom att enbart mäta längder (med t ex ett måttband) kan kontrollera om en husgrund (eller ett rum, o s v) är rektangulär. (Om ni inte vet ingår det i uppgiften att tänka ut detta).



1. Skriv upp alla steg i en sådan process.
2. Bevisa att metoden är korrekt.
3. Diskutera värdet med att ge ett sådant bevis: bra/dåligt? Varför?

Övning G

Denna övning handlar om längd och mätning.

1. Redan tidigare användes begreppet längd av en sträcka (hur?). Man tar väl för givet att varje sträcka kan tillordnas ett mätetal, som är ett positivt reellt tal. Diskutera vad som menas med detta.

2. Vad menas med en enhet? Kan en enhet delas? Kan den delas hur många gånger som helst?

3. Vad menas med kommensurabla sträckor? Hur kan man avgöra om två sträckor är kommensurabla?

4. Är sidan och diagonalen i en kvadrat kommensurabla?

5. Vad menas med avståndet mellan två (parallella) linjer? Hur mäter man det?

Övning H

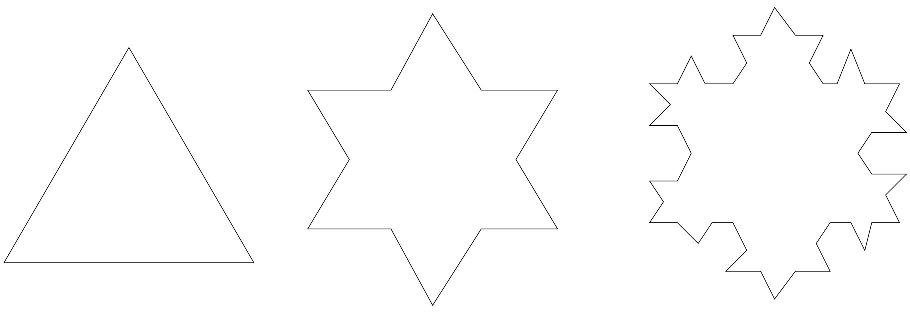
1. Vet du vad *area* är? Vad är en yta. Vad är skillnaden?

2. Visa punkt 1 och 2 om area av parallellogram och triangel på sid. 8 i kompendiet.

Övning I

1. Kan det vara så att en figur med ändlig area kan ha en godtycklig stor omkrets?

   Vi studerar von Kochs 'snöflingestjärna'.



   Om vi kallar de olika stjärnorna S_i med triangeln S_1 som början, så kan vi beskriva att man får S_{i+1} ur S_i genom att sätta en liksidig triangel på den mittersta tredje delen av varje sida (och att ta bort dubbla sträckor).

2. Beräkna längden av omkretsen av stjärna S_n.

3. Vad händer med omkretsen då $n \to \infty$?

Övning J

Likformighetsbegreppet.

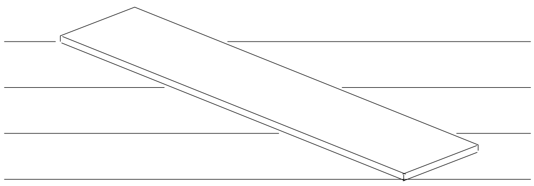
1. Tänk igen på vad som menas med att två figurer är lika, är kongruenta, är likformiga (har "samma form").
2. Vad menas med att två trianglar är likformiga? Jämför med kongruensdefinitionen. Vad behöver man veta enligt definitionen av likformighetsbegreppet mellan trianglar för att kunna konstatera att två trianglar är likformiga? Är det nödvändigt att alla villkor i definitionen (6 stycken) gäller? Vilken information räcker för att sluta sig till att två trianglar är likformiga?
3. Behöver två figurer som är likformiga vara kongruenta och/eller lika? Varför/varför inte? Är två kvadrater likformiga? När är de lika eller kongruenta?
4. **Gyllene snittet**: hitta en rektangel sådan att om man tar bort en kvadrat så återstår en rektangel som är likformig med den ursprungliga.

Övning K

Lös uppgifterna 7, 8, 10, 13, 18 i kompendiet på sid. 17 och 18.

Övning L

1. Om man vill dela en bräda i 3 lika delar så kan man skaffa sig 4 parallella linjer (t ex springor i ett parkettgolv) med lika avstånd.



   Ni får förtydliga metoden själva. Verkar den praktisk? Varför är den korrekt? (Ge ett bevis!).

2. Hitta på en metod att dela brädan i förhållandet $2:5$, $1:4$, $1:n$, $m:n$.
3. Jämför metoden med konstruktionsproblemet 5 på sid. 15 i kompendiet.

Övning M

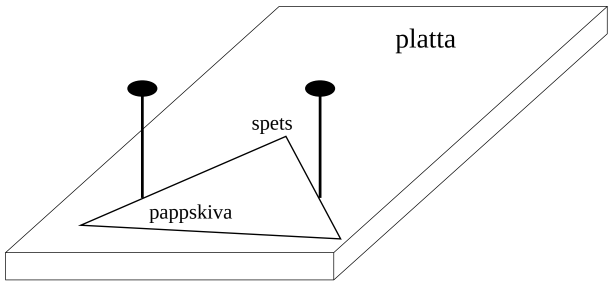
Pythagoras sats.

1. Formulera satsen.

2. Tag reda på så många bevis för Pythagoras sats som du kan.
3. Vad behövs för att göra 'klipp-och-klistra'–beviset (se sid. 10 i kompendiet) till ett riktigt bevis?
4. Gör ett bevis med hjälp av areaberäkningar i den vänstra figuren på sid. 10 i kompendiet.

Övning N

Betrakta följande experimentuppställning bestående av en platta med två spikar och en triangelformad pappskiva. Gör en egen (plattan kan ersättas med en pappersark med två markerade punkter).



Om pappskivan skjutes in mot spikarna kommer spetsen att hamna i en bestämd punkt — markera denna punkt. Variera nu detta förfarande och du får en mängd punkter. Dessa punkter hamnar på en kontinuerlig kurva (varför?). Hur ser kurvan ut? Kan du bevisa ditt förmodan?

Övning O

Om du befinner dig på havet och ser t ex två fyrar under konstant vinkel — trots att du rör dig — vad betyder det? Kan du hitta på ett sätt att kontrollera att du inte rör dig? (Detta kan vara viktigt om man ligger för ankar på redden.)

Övning P

Lös uppgifterna 19, 23, 27 och 31 i kompendiet (sid. 18 och 19).

Övning Q

Låt $\triangle ABD$ vara en likbent triangel och C mittpunkten på AD. Antag att $|BC| = a$, $|AC| = b$ och $|AB| = |DB| = c$, där $a^2 + b^2 = c^2$. Bestäm avståndet mellan B och

(a) medianernas skärningspunkt,

(b) bisektrisernas skärningspunkt,

(c) mittpunktsnormalernas skärningspunkt,

(d) höjdernas skärningspunkt.

Observera att all dessa punkter ligger på linjen BC.

Övning R

Geometriska konstruktioner med passare och linjal.

1. Läs texten om geometriska konstruktioner med passare och linjal på sid. 15 i kompendiet. Lös själv alla konstruktionsuppgifter på denna sida.
2. Lös uppgifterna 37, 38, 39 och 42 i kompendiet.
3. Förklara hur man utan att mäta kan addera och subtrahera kvadrater med hjälp av Pythagoras sats (dvs med passare och linjal konstruera en kvadrat vars area är summan respektive skillnaden av areorna av två givna kvadrater).

Övning S

Varför byter en spegel höger och vänster, men inte upp och ner, och vad händer om du inte står men ligger framför spegeln?