Övningshäfte 1: Induktion, rekursion och summor

Övning A

1. Kan ni fortsätta följden 1,3,5,7,9,11,... ?

2. Vilket är det 7:e talet i följden? Vilket är det 184:e? Vilket är tal nr n?

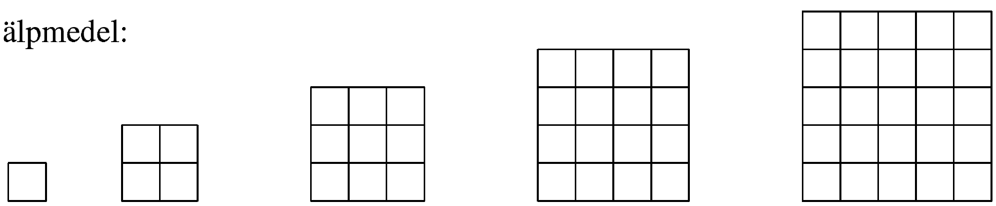
3. Titta nu på delsummorna av talen i följden:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= \\ 1+3+5 &= \\ 1+3+5+7 &= \\ 1+3+5+7+9 &= \end{aligned}$$

   Ser ni något mönster? Kan ni skriva upp ett allmänt påstående med n stycken termer i vänsterledet? Vad står i så fall i högerledet?

   Hur skulle man kunna visa detta påstående?

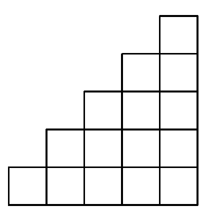
   Hjälpmedel:



4. Lustigt nog blir inte formeln lika snygg för delsummorna i följden $1, 2, 3, \ldots$. Gauss, påstås det, gjorde så här när han var nio år gammal för att bestämma $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & 100 \\ 100 & 99 & 98 & \cdots & 1 \\ \hline 101 & 101 & 101 & \cdots & 101 \end{array}$$

   Man kan också tackla detta geometriskt, med hjälp av följande figur, fast man kanske behöver två kopior:



   Eller också kan ni dela upp summan $1 + 2 + \cdots + n$ för att dra nytta av jobbet ni gjorde med $1 + 3 + 5 + \cdots$. Ni har ju redan gjort halva jobbet, eller hur?

Övning B

Det finns ett praktiskt och kompakt sätt att beteckna (långa) "regelbundna" summor som t ex $1 + 3 + 5 + \cdots + 101$. Först bestämmer man ett uttryck (en funktion) som beskriver tal nummer k i summan. I fallet $1 + 3 + 5 + \cdots + 101$ så är som ni såg ovan tal nummer k inget annat än $2k - 1$. Nästa steg är att kontrollera vilket k som det sista talet i summan svarar mot. I fallet $1 + 3 + 5 + \cdots + 101$ så får vi $101 = 2k - 1$ vilket ger $k = 51$. Man betecknar summan med den grekiska bokstaven (stora) sigma, Σ, på följande sätt:

$$\sum_{k=1}^{51} 2k - 1.$$

Denna ska utläsas som att man ska ta summan för alla $2k - 1$ när k antar alla heltalsvärden från 1 till 51. Vi kallar 51 för summans slutindex och 1 för summans startindex. På motsvarande sätt får vi för summan $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ att den kan skrivas som

$$\sum_{k=1}^{n} k.$$

Betrakta nu summan $5 + 6 + 7 + 8 + \cdots + n$ som är samma summa fast man börjar lite senare. Enklast betecknar man detta genom att ändra startindex för summan och skriver

$$\sum_{k=5}^{n} k.$$

Alternativt kan man fundera ut utifrån att tal 1 är 5, tal 2 är 6, tal 3 är 7 etc att tal k är $k + 4$. Det sista talet i summan har då $k + 4 = n$, d v s $k = n - 4$. Vi får alltså att summan är

$$\sum_{k=1}^{n-4} k + 4.$$

Man kan alltså byta startindex på summan. Observera att då ändras slutindex alltid lika mycket eftersom annars skulle antalet termer i summan förändras.

Vad händer nu om startindex är större än slutindex som t ex i

$$\sum_{k=10}^{7} k.$$

Vi ska alltså summera för alla k med $k \geq 10$ och $k \leq 7$. Några sådana k finns det inte så vi får en "tom summa". Denna är per definition lika med 0.

Avsnitt 4.1 i Vretblad handlar om summasymbolen och den besläktade produktsymbolen. Läs gärna också detta innan ni ger er på följande uppgifter:

1. Räkna ut följande summor:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 2k - 1.$

(b) $\sum_{j=4}^{7} j^2$.

(c) $\sum_{k=1}^{99} (-1)^k$.

(d) $\sum_{j=1}^{10} 7$.

(e) $\sum_{j=7}^{6} k^4$.

2. Skriv följande summor med hjälp av Σ-symbolen:

   (a) $1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + 144$

   (b) $10 + 12 + 14 + 16 + \cdots + 1020$

   (c) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$

3. Låt a vara ett tal och b_k och c_k två talföljder. Motivera följande viktiga likheter:

$$\sum_{k=1}^{n} (c_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

   och

$$\sum_{k=1}^{n} (ab_k) = a \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

   Vilka (välkända) räkneregler är det ni använder?

   (Tips: Skriv ut de första termerna i de olika summorna för att komma igång.)

4. Skriv om summan

$$\sum_{j=5}^{20} j^2$$

   så att den får startindex 1. (Glöm inte att korrigera slutindex!)

Övning C

Ni har redan tidigare tittat på rekursion och vi kommer nu tillbaka till detta. Rekapitulera att en följd av tal x_1, x_2, x_3 etc är rekursivt definierad om dess värden är definierade av tidigare värden i följden. Vi har t ex

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + 2, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

vilket ger $x_1 = 1$, $x_2 = x_1 + 2 = 3$, $x_3 = x_2 + 2 = 5$ etc. Kanske inser man att det bör vara $x_k = 2k - 1$ oavsett vad k är. I det här fallet finns det alltså också en explicit formel $(2k - 1)$, men detta är faktiskt inte alltid sant.

I många fall är det enklare att hitta en rekursiv formel än att direkt hitta en explicit sådan. För "Tornen i Hanoi" fann ni (förmodligen) att om antalet flytt det krävdes med n brickor var x_n så gällde att

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + 1 + x_n = 2x_n + 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Denna fick man av det faktum att för att flytta $n+1$ brickor så måste man först flytta n brickor, sedan den största brickan och sedan återigen n brickor.

En summa kan man se som en rekursiv följd på följande sätt. Låt

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

där a_k är någon följd av tal. Då är

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = x_n + a_{n+1}.$$

Vi kan alltså definiera summan rekursivt genom

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \\ x_{n+1} = x_n + a_{n+1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

1. Liseberg undersökte hur stor andel av dess besökare som återkom från året innan. Man fann att av alla besökare ett år så återkom 70% året därpå. Dessutom var det 60000 nya besökare, d v s sådana som inte var där året innan. Låt x_n vara antalet besökare år n. Antag att $x_{2004} = 300000$ (vi pratar olika besökare inte antalet besök).
   (a) Skriv ett rekursivt samband mellan x_{n+1} och x_n om vi antar att uppgifterna ovan gäller.
   (b) Hur många besökare kommer man att ha 2007 om vi förutsätter att mönstret fortsätter?
   (c) Hur många nya besökare måste man ha (istället för 60000) för att antalet besökare ska vara stabilt på 300000?
   (d) Om vi återigen antar att antalet nya besökare är 60000. Finns det då något värde på antalet besökare så att vi har ett stabilt värde? (Med andra ord kan vi hitta värde på x_n så att $x_{n+1} = x_n$?)

2. Skriv summan $x_n = \sum_{j=1}^{n} j^2$ som en rekursiv följd.

Övning D

Induktion är ett mycket effektivt redskap i matematiken. Dess syster är *rekursionen* som vi redan tittat på. Induktion kan användas för att bevisa t ex en explicit formel för en summa som t ex

$$\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$$

eller mer generellt att en rekursiv talföljd har en viss explicit formel. Det finns som vi kommer att se exempel på många andra tillfällen då man kan ta till induktion. Generellt kan man dock säga att det alltid i någon mening ligger någon typ av rekursion i bakgrunden. De är verkligen osklijaktiga systrar.

Matematisk induktion bygger på följande princip (som är en direkt följd av det så kallade induktionsaxiomet som är ett av Peanos fem axiom för de naturliga talen):

1. (Basfall) Visa att ett påstående som beror på en variabel n är sant om $n = 1$.
2. (Induktionssteget) Visa att om vi antar att påståendet är sant för ett tal k så är det också sant för talet $k + 1$.
3. Dra slutsatsen att då är påståendet sant för alla positiva heltal n.

Vi gör ett exempel. Låt

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$$

och så ska vi bevisa att $x_n = n^2$ för alla positiva heltal n.

1. (Basfall) Först gör vi fallet då $n = 1$. Vi har att

   $$x_1 = \sum_{k=1}^{1} (2k - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \text{ och } 1^2 = 1,$$

   så det är sant för $n = 1$.

2. (Induktionssteget) Antag nu att det är sant för ett fixt men godtyckligt tal k, d v s att $x_k = k^2$. Vi ska visa att i så fall är $x_{k+1} = (k + 1)^2$. Genom att utnyttja att vi kan skriva summan x_{n+1} som x_n plus sista termen så får vi

   $$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sum_{j=1}^{k+1} (2j - 1) = \sum_{j=1}^{k} (2j - 1) + (2(k + 1) - 1) \\ &= x_k + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2. \end{aligned}$$

   I det näst sista steget så utnyttjade vi vårt induktionsantagande att $x_k = k^2$. Detta var nyckeln till att vi fick fram att $x_{k+1} = (k + 1)^2$.

3. Vi drar nu slutsatsen att
$$x_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$
för alla positiva heltal n.

Innan ni ger er på uppgifterna nedan så läs gärna om induktion som är avsnitt 4.2 i Vretblad.

1. Diskutera i gruppen följande viktiga fråga: Är det rimligt att utifrån basfallet och induktionssteget dra slutsatsen att det gäller för <u>alla</u> positiva heltal.

2. Ge ett induktivt bevis av formeln för $1+2+3+\cdots+n$. Man skulle kunna säga att ett sådant bevis är *rigoröst*, i motsats till det intuitiva “bildbeviset.” Vi återkommer till detta, men diskutera nu vilka invändningar man skulle kunna ha mot bildbeviset, och på vilket sätt det induktiva beviset är bättre i det avseendet. Finns det något positivt att säga om bildbeviset, eller borde sådana bevis förkastas helt?

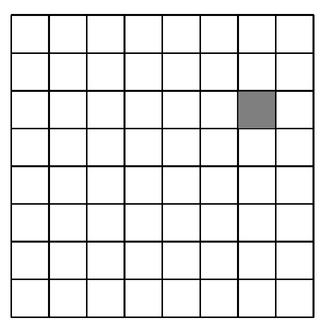
3. Låt en talföljd definieras rekursivt genom
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = 3x_n + 2, \quad n \geq 1 \end{cases}$$
Bevisa att $x_n = 3^n - 1$ för alla positiva heltal n.

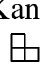
Övning E

1. Visa att det går att lösa problemet med Tornen i Hanoi för godtyckligt många skivor. Beviset borde vara kort, för ni skall bara bevisa att problemet *går* att lösa.

2. Visa att det behövs exakt $2^n - 1$ flytt om man har n brickor.

Övning F



Tänk er en “schackbräda” med $2^n \times 2^n$ rutor, där man har tagit bort en av rutorna. Kan man täcka en sådan bräda fullständigt med bitar av formen  som inte överlappar varandra?

Följande övningar i Vretblads bok rekommenderas för självstudier:

Vretblad: 4.1, 4.6, 4.9, 4.10, 4.12, 4.27, 4.30.