MATEMATIK
Göteborgs universitet

Datum: 20060607
Klockan: 8.30–13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Jonas Hartwig,
076 - 272 1861

Tentamensskrivning i LMA 100, Matematik för lärare 1, del 2

1. Visa att de tre medianerna i en triangel skär varandra i en punkt.

2. Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $(1,1,1)$, $(2,2,0)$ och $(3,0,1)$.

3. Bestäm minsta avståndet från punkten $(5,5,4)$ till linjen genom punkterna $(0,3,0)$ och $(3,-3,6)$.

4. Bestäm vinklarna i triangeln i rummet med hörn $(1,1,1)$, $(3,3,2)$ och $(2,-1,3)$.

5. Vi definierar en relation $\sim$ på $\mathbb{C}[X]$ genom att säga att $f(X) \sim g(X)$ om och endast om det finns ett komplext tal $c \neq 0$ sådant att $f(X) = c \cdot g(X)$.
a) Motivera noggrant att detta är en ekvivalensrelation.
b) Ge en mängd av polynom med precis en representant ur varje ekvivalensklass.

6. Polynomet $f(X) = X^4 - 2X^3 + 4X - 4$ har roten $X = 1 + i$.
a) Bestäm alla rötter till f.
b) Faktorisera $f(X)$ i irreducibla polynom i $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{Q}[X]$.

7. Lös ekvationen $z^4 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Ange lösningarna på formen $z = a + bi$ utan några trigonometriska funktioner.

8. Vi definierar en följd av polynom $f_n(x)$ rekursivt enligt följande:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1, \\ f_n(x) = x \cdot f_{n-1}(x-1), \text{ om } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Bestäm $f_5(x)$.
b) Bestäm en explicit formel för $f_n(x)$ och bevisa att denna gäller för alla naturliga tal n.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
Tentan räknas vara färdigrättad onsdagen den 28 juni.
Lycka till!

Stefan Lemurell och Jan Stevens