MATEMATIK sl/js
Göteborgs universitet

**Lösningar till tentamensskrivningen**
**LMA 100 , Matematik för lärare 1, del 2, 20060607**

**1. Visa att de tre medianerna i en triangel skär varandra i en punkt.**

Se kompendiet om Euklidisk geometri.

**2. Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $(1,1,1)$, $(2,2,0)$ och $(3,0,1)$.**

Normalvektorn till planet är vinkelrät mot vektorerna $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ och fås som vektorprodukt $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Ekvationen är $x + 2y + 3z = 6$.

**3. Bestäm minsta avståndet från punkten $(5,5,4)$ till linjen genom punkterna $(0,3,0)$ och $(3,-3,6)$.**

Linjen genom $(0,3,0)$ och $(3,-3,6)$ har riktningsvektor $\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-6\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ och ges i parameterform av $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ och avståndet är minst i punkten där planet genom $(5,5,4)$, vinkelrät mot linjen, skär linjen. Planet har ekvation $x - 2y + 2z = 3$. I skärningspunkten gäller $t - 2(3 - 2t) + 4t = 3$, så $9t = 9$ och $t = 1$. Skärningspunkten är $(1,1,2)$ och avståndet till $(5,5,4)$ är längden av vektorn $\begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Svaret är $2\sqrt{4+4+1} = 6$.

**4. Bestäm vinklarna i triangeln i rummet med hörn $(1,1,1)$, $(3,3,2)$ och $(2,-1,3)$.**

Låt $A = (1,1,1)$, $B = (3,3,2)$ och $C = (2,-1,3)$. Då är $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ med längd $3$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ med längd $3$ och $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$ med längd $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Vi har $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, så vinkeln $\angle A$ är rät. Från $9 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}| \cos\angle C$ får vi $\cos\angle C = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ så $\angle C$ är $45°$ och därmed är också $\angle B$ $45°$.

**5. Vi definierar en relation $\sim$ på $\mathbb{C}[X]$ genom att säga att $f(X) \sim g(X)$ om och endast om det finns ett komplext tal $c \neq 0$ sådant att $f(X) = c \cdot g(X)$.**
**a) Motivera noggrant att detta är en ekvivalensrelation.**
**b) Ge en mängd av polynom med precis en representant ur varje ekvivalensklass.**

a) Den är reflexiv, ty $f(X) = 1 \cdot f(X)$ och $1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Den är symmetrisk, ty om $f(X) = c \cdot g(X)$ så är $g(X) = \frac{1}{c} \cdot g(X)$ och $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ger $\frac{1}{c} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
Den är transitiv, ty om $f(X) = c_1 \cdot g(X)$ och $g(X) = c_2 \cdot h(X)$ så gäller att

$$f(X) = c_1 \cdot g(X) = c_1 \cdot (c_2 \cdot h(X)) = (c_1 \cdot c_2) \cdot h(X)$$

och $(c_1 \cdot c_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Eftersom den har dessa tre egenskaper så är den per definition en ekvivalensrelation.
b) Vi kan välja alla polynom vars ledande koefficient är $1$: Alla polynom (utom nollpolynomet) är ekvivalenta till ett sådant, ty om

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0$$

med $a_n \neq 0$ så är detta ekvivalent med $\frac{1}{a_n} f(X)$ som har ledande koefficient $1$. Dessutom om vi har två sådana polynom som är relaterade, $f(X) = c \cdot g(X)$, så måste $c = 1$, ty annars kan inte båda ha ledande koefficient lika med $1$. Därmed har vi motiverat att det finns exakt ett sådant polynom i varje ekvivalensklass. Ska man vara petig, och det ska man väl, så ska man lägga till nollpolynomet också som utgör en egen klass.

**6. Polynomet $f(X) = X^4 - 2X^3 + 4X - 4$ har roten $X = 1 + i$.**
**a) Bestäm alla rötter till $f$.**
**b) Faktorisera $f(X)$ i irreducibla polynom i $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{Q}[X]$.**

a) Eftersom vi har ett reellt polynom så har det också roten $X = 1 - i$. Därmed är $(X - (1-i))(X - (1+i)) = X^2 - 2X + 2$ en faktor i $f$. Genom att göra polynomdivision så får man

$$f(X) = (X^2 - 2)(X^2 - 2X + 2).$$

Vi får alltså också rötterna $\pm\sqrt{2}$ och därmed har vi hittat alla $4$ rötterna.
b) Vi får i de olika polynomringarna följande faktoriseringar i irreducibla polynom:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{C}[X]: & f(x) = (X - (1-i))(X - (1+i))(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}) \\ \mathbb{R}[X]: & f(x) = (X^2 - 2X + 2)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}) \\ \mathbb{Q}[X]: & f(x) = (X^2 - 2X + 2)(X^2 - 2) \end{array}$$

**7. Lös ekvationen $z^4 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Ange lösningarna på formen $z = a + bi$ utan några trigonometriska funktioner.**

Sätt $t = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ som är ett positivt reellt tal och som alltså har argumentet lika med $0$. Vi får då lösningarna

$$z_k = |t|^{\frac{1}{4}}(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k) = t^{\frac{1}{4}}(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k),\ k = 0, 1, 2, 3,$$

där $\alpha_k = \frac{0+2\pi k}{4}$. Detta ger vinklarna $0$, $\pi/2$, $\pi$ samt $3\pi/2$ samt lösningarna

$$t^{\frac{1}{4}},\ it^{\frac{1}{4}},\ -t^{\frac{1}{4}},\ -it^{\frac{1}{4}}.$$

Tanken var att ekvationen skulle vara $z^4 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ och lösningen blir då: (även denna godkännes om man “gissat” sig till att det var ett tryckfel)
Vi har att $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ har beloppet $1$ och argumentet $2\pi/3$. Vi får då lösningarna

$$z_k = \cos\alpha_k + i\sin\alpha_k,\ k = 0, 1, 2, 3,$$

där $\alpha_k = \frac{2\pi/3+2\pi k}{4}$. Detta ger vinklarna $\pi/6$, $2\pi/3$, $7\pi/6$ och $5\pi/3$ samt lösningarna

$$\frac{i+\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-i-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.$$

Vi har att $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ har beloppet $1$ och argumentet $2\pi/3$.

**8. Vi definierar en följd av polynom $f_n(x)$ rekursivt enligt följande:**

$$\begin{cases} f_0(x) = 1, \\ f_n(x) = x \cdot f_{n-1}(x-1), \ \textbf{om } n \geq 1. \end{cases}$$

**a) Bestäm $f_5(x)$.**
**b) Bestäm en explicit formel för $f_n(x)$ och bevisa att denna gäller för alla naturliga tal $n$.**

a) Vi får rekursivt att

$$\begin{aligned} f_1(x) = xf_0(x-1) &= x \\ f_2(x) = xf_1(x-1) &= x(x-1) \\ f_3(x) = xf_2(x-1) &= x(x-1)(x-2) \\ f_4(x) = xf_3(x-1) &= x(x-1)(x-2)(x-3) \\ f_5(x) = xf_4(x-1) &= x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \end{aligned}$$

b) Vår kalkyl antyder att det skulle kunna vara så att

$$f_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-i) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n+1).$$

Vi bevisar detta med hjälp av induktion.
Basfall: $n = 0$. Då är produkten $1$ per definition och därmed stämmer likheten.
Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för ett naturligt tal $n \geq 0$. Vi ska visa att då är det också sant för $n+1$. Men vi har

$$f_{n+1}(x) = x \cdot f_n(x-1) = x\prod_{i=0}^{n-1}((x-1)-i) = x\prod_{i=1}^{n}(x-i) = \prod_{i=0}^{n}(x-i) = \prod_{i=0}^{(n+1)-1}(x-i)\ ,$$

där den första likheten följer av rekursionen, den andra av induktionsantagandet och resten är algebraisk manipulation.
Nu följer det av induktionsprincipen att likheten gäller för alla naturliga tal $n$.