MATEMATIK
Göteborgs universitet

Datum: 20070605
Klockan: 8.30–13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Elin Götmark,
076 - 272 1861

Tentamensskrivning i LMA 100, Matematik för lärare 1, del 2

1. Visa att de tre höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.

2. Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $(1, 2, 1)$, $(2, 5, 3)$ och $(3, 1, 2)$.

3. Bestäm vinklarna i triangeln i rummet med hörn $(1, 2, 1)$, $(2, 5, 3)$ och $(3, 1, 2)$.

4. Bestäm minsta avståndet från punkten $(1, 2, 1)$ till linjen genom punkterna $(2, 5, 3)$ och $(3, 1, 2)$.

5. a) Bevisa med induktion att $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.
b) Bevisa samma påstående med hjälp av polynomdivision.

6. Vilka av följande relationer på mängden av polynom $\mathbb{R}[X]$ är ekvivalensrelationer? Motivera dina svar!
a) $P \sim_a Q$ då och endast då P och Q har samma grad.
b) $P \sim_b Q$ då och endast då P och Q har samma nollställen.
c) $P \sim_c Q$ då och endast då P och Q har största gemensamma delare 1.
d) $P \sim_d Q$ då och endast då P och Q har lika många irreducible faktorer.
e) $P \sim_e Q$ då och endast då P och Q har gemensamma nollställen.

7. Ge ett exempel på en ändlig mängd A, en oändlig uppräknelig mängd B, en ouppräknelig mängd C. Vad har mängderna $A \cup B$ och $A \times B$ för kardinalitet?
($A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$ är mängden av alla par med första elementet i A och andra elementet i B). Motivera dina svar!

8. Betrakta följden av komplexa tal $z_k = (i\sqrt{2})^k$ för $k \in \mathbb{N}$. Beskriv följden både algebraiskt och geometriskt (dvs. räkna ut några termer i följden och beskriv ett mönster för hur termerna ser ut och var de ligger i det komplexa planet).

Visa att $z_{k+4} = 4z_k$ för alla $k \in \mathbb{N}$ och räkna ut $\displaystyle\sum_{k=0}^{15} z_k$.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
Tentan räknas vara färdigrättad fredagen den 15 juni.
Lycka till!

Laura Fainsilber och Jan Stevens