MATEMATIK lf/js
Göteborgs universitet

Lösningar till tentamensskrivningen
LMA 100 , Matematik för lärare 1, del 2, 20070605

1. Visa att de tre höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.

Se kompendiet.

2. Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $(1, 2, 1)$, $(2, 5, 3)$ och $(3, 1, 2)$.

Normalvektorn till planet är vinkelrät mot vektorerna $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och fås som vektorprodukt $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.
Ekvationen är $5x + 3y - 7z = 4$.

3. Bestäm vinklarna i triangeln i rummet med hörn $(1, 2, 1)$, $(2, 5, 3)$ och $(3, 1, 2)$.

Låt $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 5, 3)$ och $C = (3, 1, 2)$. Då är $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ med längd $\sqrt{14}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ med längd $\sqrt{6}$ och $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ med längd $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Vi har $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 3 + 2 = 1 = \sqrt{14}\sqrt{6} \cos \angle A$, så $\cos \angle A = \frac{1}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{42}$ och $\angle A = \arccos \frac{\sqrt{21}}{42}$. Från $13 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CB}| \cos \angle B$ får vi $\angle B = \arccos \frac{13}{42}\sqrt{7}$. Slutligen är $\angle C = \arccos \frac{5}{3\sqrt{2}\sqrt{6}} = \arccos \frac{5}{18}\sqrt{3}$.

4. Bestäm minsta avståndet från punkten $(1, 2, 1)$ till linjen genom punkterna $(2, 5, 3)$ och $(3, 1, 2)$.

Linjen genom $(2, 5, 3)$ och $(3, 1, 2)$ har riktningsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ och ges i parameterform av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ och avståndet är minst i punkten där planet genom $(1, 2, 1)$, vinkelrät mot linjen, skär linjen. Planet har ekvation $x - 4y - z = -8$. I skärningspunkten gäller $(2+t)-4(5-4t)-(3-t) = -8$, så $18t = 13$ och $t = \frac{13}{18}$. Skärningspunkten har ortsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{13}{18} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 49 \\ 38 \\ 41 \end{pmatrix}$ och avståndet till $(1, 2, 1)$ är längden av vektorn $\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 49 \\ 38 \\ 41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 31 \\ 2 \\ 23 \end{pmatrix}$. Svaret är $\frac{1}{18}\sqrt{961 + 4 + 529} = \frac{1}{18}\sqrt{1494} = \frac{1}{6}\sqrt{166}$.

5. a) Bevisa med induktion att $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x}$.

b) Bevisa samma påstående med hjälp av polynomdivision.

För att bevisa med induktion att $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ för alla $n \in \mathbb{N}$ börjar vi med att konstatera att likheten gäller för $n = 1$ (basfall) då vänsterledet är $x^0 = 1$ och högerledet $\frac{1-x}{1-x} = 1$.

Vi antar sedan att likheten gäller för något naturligt tal p, nämligen att $\sum_{k=0}^{p-1} x^k = \dfrac{1-x^p}{1-x}$ och vill visa att motsvarande likhet gäller för $p+1$.

Vi har då i vänsterledet $\sum_{k=0}^{p} x^k$ som kan skrivas som $\frac{1-x^p}{1-x} + x^p$ enligt induktionsantagendet.

Men $\frac{1-x^p}{1-x} + x^p = \frac{1-x^p}{1-x} + \frac{x^p - x^{p+1}}{1-x} = \frac{1-x^{p+1}}{1-x}$ vilket var det förväntade högerledet.

Därmed har vi visat att om likheten gäller för något naturligt tal, så gäller den även för nästa naturligt tal. Eftersom den gället för talet 1, så gället den för alla naturliga tal.

För att bevisa resultatet med polynomdivision kan man ställa upp polynomdivision (jag gör inte det här eftersom det är rätt krångligt i ordbehandlaren; se boken, avsnitt 7.2 och skriv ner det när du läser beskrivningen här). T.ex. kan man börja med att dividera $x^4 - 1$ med $x - 1$, och när man sett mönstret kan man skissa på divisionen av $x^n - 1$ med $x - 1$. Mönstret är att man vid steg i lägger till x^{n-i} i kvoten och därmed tar bort $x^{n-i}(x-1)$, dvs $x^{n-i+1} - x^{n-i}$ i divisionen. Effekten är att $x^{n-i+1} - 1$ i täljaren ersätts med $x^{n-i} - 1$. Efter $n - 1$ steg är resten $x - 1$, och efter ett steg till når man det önskade resultatet: en rest på 0 och en kvot på $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1$.

(2 poäng för induktionsbeviset, varav 0,5 för ett basfall och ett upplägg med struktur av induktionsbevis, 1p för beviset med polynomdivision)

6. Vilka av följande relationer på mängden av polynom $\mathbb{R}[X]$ är ekvivalensrelationer? Motivera dina svar!

a) $P \sim_a Q$ **då och endast då** P **och** Q **har samma grad.**
b) $P \sim_b Q$ **då och endast då** P **och** Q **har samma nollställen.**
c) $P \sim_c Q$ **då och endast då** P **och** Q **har största gemensamma delare 1.**
d) $P \sim_d Q$ **då och endast då** P **och** Q **har lika många irreducible faktorer.**
e) $P \sim_e Q$ **då och endast då** P **och** Q **har gemensamma nollställen.**

Jag ger mycket korta motiveringar.

a) *“$P \sim_a Q$ då och endast då P och Q har samma grad”* är en ekvivalensrelation :
reflexiv eftersom varje polynom har samma grad som sig själv,
symmetrisk eftersom om P och Q har samma grad, så har Q och P samma grad,
transitiv eftersom om P och Q har samma grad, och Q och R har samma grad, så har P och R samma grad .

b) *“$P \sim_b Q$ då och endast då P och Q har samma nollställen”* är en ekvivalensrelation :
reflexiv: varje polynom har samma nollställen som sig själv,
symmetrisk: Om P och Q har samma nollställen, så har Q och P samma nollställen,
transitiv: Om P och Q har samma nollställen, och Q och R har samma nollställen, så har P och R samma nollställen.

c) *“$P \sim_c Q$ då och endast då P och Q har största gemensamma delare 1”* är ingen ekvivalensrelation: den är varken reflexiv ($SGD(P(X), P(X)) = P(X)$) eller transitiv (motexempel: $P(X) = (X-2)(X-3)$, $Q(X) = (X-1)$, $R(X) = (X-2)(X-5)$, då är $SGD(P(X), Q(X)) = 1$, $SGD(Q(X), R(X)) = 1$ men $SGD(P(X), R(X)) = (X-2)$)

Har man visat att relationen inte är reflexiv, så behöver man inte leta vidare: detta räcker för att dra slutsatsen att den inte är en ekvivalensrelation. Jag tror att många tänkte på polynomens alla gemensamma delare, istället för SGD.

d) *"$P \sim_d Q$ då och endast då P och Q har lika många irreducibla faktorer"* är en ekvivalensrelation
reflexiv: Varje polynom har lika många irreducibla faktorer som sig själv,
symmetrisk: Om P och Q har lika många irreducibla faktorer, så har Q och P lika många irreducibla faktorer,
transitiv: Om P och Q har lika många irreducibla faktorer, och Q och R har lika många irreducibla faktorer, så har P och R lika många irreducibla faktorer.

e) *"$P \sim_e Q$ då och endast då P och Q har gemensamma nollställen"* är ingen ekvivalensrelation: den är inte transitiv. Motexempel: $P(X) = (X-2)(X-3)$, $Q(X) = (X-1)(X-2)$, $R(X) = (X-1)(X-5)$. P och Q har gemensam nollställe i 2, Q och R har gemensam nollställe i 1, P och R har inga gemensamma nollställen.

(1,5p för rätta svar untan motivering, 0,5p för uttryck om reflexivitet, transitivitet, symmetri, även om de används fel)

7. Ge ett exempel på en ändlig mängd A, en oändlig uppräknelig mängd B, en ouppräknelig mängd C. Vad har mängderna $A \cup B$ och $A \times B$ för kardinalitet?
($A \times B = \{(a,b), a \in A, b \in B\}$ är mängden av alla par med första elementet i A och andra elementet i B). Motivera dina svar!

Man kan till exempel ange $A = \{1,2,3,4\}$ som har 4 element, $B = \mathbb{N}$ och $C = \mathbb{R}$.
Då är $A \cup B = \mathbb{N}$, som är uppräknelig. Har man valt ett exempel där A inte är en delmängd i B får man argumentera att man kan räkna upp $A \cup B$ genom att först räkna elementen i A (de är ändligt många), och sedan elementen i B. Så svaret är "uppräknelig" i alla fall.
Även $A \times B$ är uppräknelig. Den består av alla par vars första element är $1,2,3,$ eller 4 och andra elementet är ett naturligt tal. Däribland finns oändligt många par $(1,n)$, oändligt många par $(2,n)$, oändligt många par $(3,n)$, oändligt många par $(4,n)$. För att räkna upp dem kan man börja med $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$, sedan fortsätta med $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,2)$,$(4,2)$, sedan $(1,3)$, $(2,3)$, $(3,3)$, $(4,3)$ osv, dvs om man har skrivit kolumner för paren av form $(1,n)$, $(2,n)$, $(3,n)$, $(4,n)$, så läser man av tabellen rad för rad.
(1,5p för välformulerade exempel, 1,5p för $A \cup B$ och $A \times B$)

8. Betrakta följden av komplexa tal $z_k = (i\sqrt{2})^k$ för $k \in \mathbb{N}$. Beskriv följden både algebraiskt och geometriskt (dvs. räkna ut några termer i följden och beskriv ett mönster för hur termerna ser ut och var de ligger i det komplexa planet).

Visa att $z_{k+4} = 4z_k$ för alla $k \in \mathbb{N}$ och räkna ut $\sum_{k=0}^{15} z_k$.

Man kan räkna $z_0 = (i\sqrt{2})^0 = 1$, $z_1 = (i\sqrt{2})^1 = i\sqrt{2}$, $z_2 = (i\sqrt{2})^2 = -2$, $z_3 = (i\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2}i$, $z_4 = (i\sqrt{2})^4 = 4$, $z_5 = (i\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}i$, $z_2 = (i\sqrt{2})^6 = -8$, och märka att vartannat värde är reellt (alternerande positiv och negativ), och vartannat imaginär (dvs en reell multipel av i, med realdel 0), och att absolutbeloppet växer med en faktor $\sqrt{2}$ för varje steg (dvs är multiplicerad med $\sqrt{2}$). Rita dessa punkter i planet (igen, det är rätt bökigt att rita i ordbehandlare, så jag avstår och beskriver istället). Man ser då punkter som ingår i en växande spiral moturs. z_0 ligger på den positiva reella axeln, z_1 på den positiva imaginära axeln, z_2 på den negativa reella axeln, z_3 på den negativa imaginära axeln, och med z_4 är vi

tillbaka på den positiva reella axeln, men ute vid 4.
För att visa att $z_{k+4} = 4z_k$ för alla naturliga tal k behövs inget induktionsbevis (det skadar inte, men är mer omständigt och många gick vilse i argumenten när de skulle ha med både k, $k+1$, $k+4$ och $k+1+4$). Det räcker att räkna ut att $z_{k+4} = (i\sqrt{2})^{k+4} = (i\sqrt{2})^4(i\sqrt{2})^k = i^4\sqrt{2}^4(i\sqrt{2})^k = 4(i\sqrt{2})^k = 4z_k$.
Sedan kan man skriva ut alla 16 termer i summan för hand, vilket inte var meningen, eller använda relationen $z_{k+4} = 4z_k$ och räkna bara $Z = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = -1 - i\sqrt{2}$ och

$$\sum_{k=0}^{15} z_k = Z + 4Z + 16Z + 64Z = 85Z = -85 - i85\sqrt{2}$$

(0,5p för att man räknat ut de första termerna, 0,5 för den geometriska framställningen, 0,5 till för helheten, 0,5 för $z_{k+4} = 4z_k$, 1p för $\sum_{k=0}^{15} z_k$)

Delpoängsangivningar ger en indikation om hur mycket vikt jag lagt på olika bitar i uppgifterna. Hur tydligt och fullständigt ni uttryckt er spelar också roll i helhetsbedömningen för varje uppgift.