

Övningshäfte 5: Ändligt och oändligt

Är det möjligt att jämföra storleken av olika talmängder? Har det någon mening om man säger att det finns fler irrationella tal än rationella? är det överhuvudtaget möjligt att jämföra storleken av oändliga mängder? Sådana frågor sysselsatte människor redan för länge sedan och svaren på dem hade mycket viktiga konsekvenser för hela matematiken.

Storleken av två mängder, båda med ett ändligt antal element, kan jämföras genom att man räknar antalet element i dem. Den metoden är oanvändbar om två mängder är oändliga. Men det finns ett sätt att jämföra ändliga mängder som kan generaliseras till oändliga. I stället för att räkna antalet element i två mängder A och B för att avgöra vilken av dessa som innehåller flest element, kan man försöka para ihop elementen i A med elementen i B så att olika element i A svarar mot olika element i B och varje element i B tillhör något par. Om det är möjligt så kan man säga att A och B har lika många element. Om det finns element i B som inte tillhör något par, så är slutsatsen att B innehåller fler element än A . Om elementen i B tar slut innan alla element i A fått bilda ett par så har A fler element än B .

För att formalisera parbildning till ett matematiskt begrepp kan man använda funktionsbegreppet. Vi repeterar först den allmänna definitionen av begreppet funktion även om de funktioner som vi betraktar i detta avsnitt har mycket speciella egenskaper.

(1) Definition. Med en **funktion** från en mängd X till en mängd Y menar man en regel som till varje $x \in X$ ordnar exakt ett element $y \in Y$. Man brukar beteckna funktioner med bokstäver (eller speciella symboler – se exempel nedan). Om f betecknar en funktion från X till Y som till $x \in X$ ordnar $y \in Y$ så skriver man $y = f(x)$ och $f : X \rightarrow Y$. $\square$

(2) Exempel. (a) Låt $X = Y = \mathbb{R}$. Om det tal som svarar mot $x \in X$ är $x^2 \in Y$ så skriver man $y = f(x) = x^2$. Andra exempel på funktioner från $X = \mathbb{R}$ till $Y = \mathbb{R}$ är $y = x^3$, $y = 2^x$, $y = \sin x$ osv. Vi kan också skriva: $y = g(x) = x^3$, $y = h(x) = 2^x$, $y = \varphi(x) = \sin x$ osv.

(b) Låt $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $Y = \{-1, 1\}$. Låt $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = -1$, $f(4) = 1$, $f(5) = -1$. Vi har inte skrivit någon formel, men vi har definierat en funktion genom att direkt föreskriva vad som svarar mot varje element i mängden X (i detta fall kan man skriva en formel – försök hitta en sådan!).

(c) Låt X vara mängden av alla människor och låt Y vara mängden av alla naturliga tal. Definiera $f(x) =$ åldern av x uttryckt i antalet dagar varvid en "påbörjad" levnadsdag räknas som en hel dag. Det är inte så lätt att beräkna värdet $y = f(x)$ då x betecknar just Dig. $\square$

Man kan åskådliggöra en funktion $f : X \rightarrow Y$ som pilar från $x \in X$ till $y = f(x) \in Y$ – se figur 1. Man säger ofta att $y = f(x)$ är **bilden** av x eller att f **avbildar** x på $y = f(x)$.

Figur 1

De funktioner som vi behöver för att jämföra olika mängder skall avbilda olika x på olika y . Vi gör följande definition.

(3) Definition. Man säger att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är **injektiv** (eller **en-entydig**) om $x_1 \neq x_2$ medför att $f(x_1) \neq f(x_2)$. Man kallar f **surjektiv** (eller **på hela Y**) om varje element y i Y är bilden av (minst) ett element x i X . En funktion som både är injektiv och surjektiv kallas **bijektiv**. $\square$

(4) Exempel. (a) Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, där $y = f(x) = x^2$, är inte injektiv, ty $3 \neq -3$, men $f(3) = 3^2 = (-3)^2 = f(-3)$ (det går lika bra att välja ett annat nollskilt tal i stället för 3). Den är inte heller surjektiv, därför att t ex -1 inte är bilden av något $x \in \mathbb{R}$ – det finns inget $x \in \mathbb{R}$ sådant att $f(x) = x^2 = -1$.

(b) Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, där $f(x) = 2^x$, är injektiv därför att $x_1 \neq x_2$ implicerar att $2^{x_1} \neq 2^{x_2}$ (tänk på funktionskurvan för f !). Men f är inte surjektiv därför att $f(x)$ alltid är ett positivt tal (negativa tal och 0 är inte bilder). Man kan istället välja $X = \mathbb{R}$ och $Y = \mathbb{R}_+$, dvs välja som Y mängden av de positiva reella talen. Då är funktionen $f : X \rightarrow Y$, där $f(x) = 2^x$ både surjektiv och injektiv, dvs bijektiv. $\square$

Vi kan tänka på en injektiv funktion $f : X \rightarrow Y$ som pilar från X till Y sådana att pilar från olika x slutar i olika y . Om f är surjektiv så är varje $y \in Y$ ändpunkten av (minst) en pil från X .

Om nu A och B är två mängder så kan vi betrakta dem som lika stora om det finns en bijektiv funktion från den ena till den andra. Vi uttrycker det på följande sätt:

(5) Definition. Man säger att två mängder A och B har samma **kardinalitet** (eller samma **mäktighet**) om det finns en bijektiv funktion $f : A \rightarrow B$. $\square$

Detta betyder att mot varje $a \in A$ svarar $b = f(a) \in B$ på ett sådant sätt att mot olika a svarar olika b och att varje b svarar mot något a . Paren är $(a, f(a))$. Intuitivt betyder existensen av f att A och B har lika många element. Den intuitionen leder till en del överraskningar när man betraktar oändliga mängder. Men låt oss börja med några exempel då mängder är ändliga.

(6) Exempel. (a) Mängderna $A = \{3, 4, 5\}$ och $B = \{11, 12, 13\}$ har samma kardinalitet. Man kan helt enkelt räkna antalet element i dessa mängder – bägge har 3 element. Men vi vill använda den andra metoden, dvs parbildning. Alltså behöver vi en bijektiv funktion från A till B . Ett exempel på en sådan funktion är följande: $f : A \rightarrow B$, där

$$f(3) = 11, \quad f(4) = 12 \quad f(5) = 13$$

dvs vi har bildat tre par $(3, 11), (4, 12), (5, 13)$.

(b) Mängden $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$ och $B = \{Feskekyrkan, Matematiskt centrum\}$ har samma kardinalitet. Man konstaterar lätt att $A = \{1, 3\}$ så att bägge mängderna har 2 element. Vi kan nu definiera en bijektiv funktion $f : A \rightarrow B$, där $f(1) = Feskekyrkan$ och $f(3) = Matematiskt centrum$, vilken ger paren $(1, Feskekyrkan)$ och $(3, Matematiskt centrum)$. $\square$

De naturliga talen $0, 1, 2, 3, \dots$ svarar mot kardinaliteter av olika ändliga mängder: 0 är antalet element i den tomma mängden, 1 är antalet element i varje mängd som har samma kardinalitet som t ex den mängd som består av endast Dig, 2 är antalet element i varje mängd som har samma kardinalitet som t ex den mängd som består av Dig och Din bästa kompis, osv. Man kan naturligtvis ställa frågan vad man menar med en ändlig mängd. Den frågan besvarades mycket skickligt av en stor tysk matematiker Richard Dedekind år 1888. Enligt Dedekind är **M en ändlig mängd om M inte har samma kardinalitet som någon av dess äkta delmängder**. Detta betyder att det inte finns en bijektiv funktion från M till en av dess delmängder N med $N \neq M$. Man kan också uttrycka det så att det inte är möjligt att para ihop elementen i M med elementen i dess äkta delmängd N (så att olika element i M svarar mot olika element i N). En oändlig mängd är alltså däremot en mängd som har en äkta delmängd med samma kardinalitet som hela mängden.

(7) **Exempel.** Mängden av de naturliga talen har samma kardinalitet som delmängden av jämna talen. Kan du visa det? $\square$

(8) **Exempel.** Heltalen $\mathbb{Z}$ har samma kardinalitet (är "lika stora") som de positiva heltalen $\mathbb{Z}_+$ och är alltså en oändlig mängd. För att visa det kan vi bilda en följd av heltalen:

0	1	-1	2	-2	3	-3	...
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
1	2	3	4	5	6	7	...

och numrera heltalen i övre raden med hjälp av de positiva heltalen som pilarna visar. På det sättet får vi en bijektion mellan $\mathbb{Z}_+$ och $\mathbb{Z}$. Man kan definiera $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ mera formellt:

$$f(n) = \begin{cases} (1-n)/2 & \text{om } n \text{ är udda} \\ n/2 & \text{om } n \text{ är jämnt} \end{cases}$$

$\square$

Övning A

Vilka av följande mängder är ändliga och vilka är oändliga?

1. Mängden av alla människor som har levt på jorden.
2. Mängden av alla böcker som har skrivits.
3. Mängden av alla ord som har använts i alla böcker som har skrivits.
4. Mängden av alla heltaliga kvadrater, dvs 0, 1, 4, 9, 16,
5. Mängden av alla primtal.
6. Mängden av alla tal mellan 0 och 1.
7. Mängden av alla tal som din miniräknare kan hantera.

Övning B

Låt $X = \{a, b, c\}$ och $Y = \{3, 4, 11\}$.

1. Para ihop elementen i mängderna X och Y så att mot olika $x \in X$ svarar olika $y \in Y$. Skriv ut dessa par.
2. Beteckna med f den funktion som Din parbildning definierar. Ange $f(a)$, $f(b)$ och $f(c)$. Är funktionen f injektiv surjektiv och/eller bijektiv?
3. Ge exempel på en funktion $g : X \rightarrow Y$ som inte är injektiv. Är den surjektiv eller bijektiv?

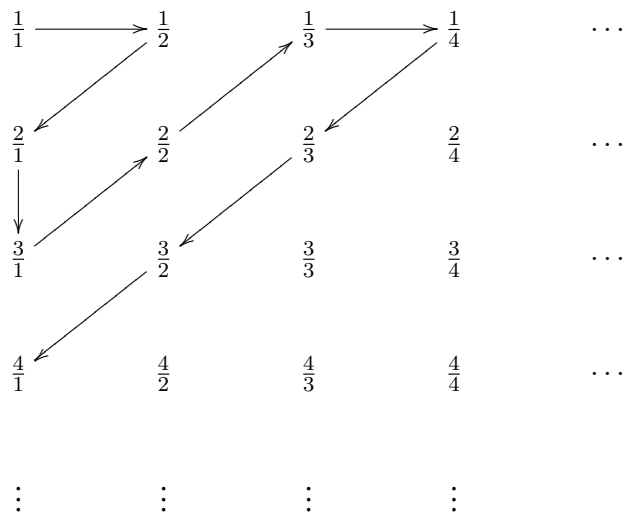
(9) Definition. En mängd som har samma kardinalitet som $\mathbb{Z}_+$ kallas **uppräknelig**. Vårt sista exempel säger att $\mathbb{Z}$ är uppräknelig. Man kan säga att en mängd A är uppräknelig om dess element kan ordnas i en följd $a_1, a_2, a_3, \dots$, därför att en bijektion $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$ numrerar elementen i A med hjälp av de positiva heltalen: $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ... osv. Om A är uppräknelig så säger man att A har *uppräkneligt många element* eller *ett uppräkneligt antal element*. $\square$

Nu vill vi visa att $\mathbb{Q}$ är uppräknelig, men låt oss innan dess göra en enkel observation som kommer att visa sig mycket nyttig:

(10) Lemma. Om A är en uppräknelig mängd och B är en ändlig eller uppräknelig mängd så är $A \cup B$ uppräknelig.

Bevis. Om $a_1, a_2, a_3, \dots$ är följderna av alla element i A och $b_1, b_2, b_3, \dots$ är följderna av alla element i B (den följderna kan vara ändliga), så kan man bilda följderna $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$ som innehåller alla element i $A \cup B$ möjligen med upprepningar. Ur den följderna kan vi nu stryka varje element vid dess upprepade förekomst och då får vi en följd av alla element i $A \cup B$. Detta visar att $A \cup B$ är uppräknelig. $\square$

(11) Exempel. $\mathbb{Q}$ är uppräknelig. Först visar vi att mängden $\mathbb{Q}_+$ av positiva rationella tal är uppräknelig. För att göra det skriver vi ut alla positiva rationella tal i form av tabellen:



Figur 2

Den omfattar alla positiva rationella tal – varje tal i $\mathbb{Q}_+$ förekommer faktiskt oändligt många gånger (visa det!). Nu kan man bilda en följd av dessa tal genom att tilldela dem i tur och ordning de positiva heltalen $1, 2, 3, \dots$ då man startar i $\frac{1}{1}$ och följer pilen i enlighet med figur 2. Man hoppar över de tal som man redan har påträffat. Alltså har vi:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\dots$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
1	2	3	4	5	6	7	$\dots$

(Man hoppar här över $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$). Detta visar att positiva rationella tal bildar en uppräknelig mängd, även om det inte är så lätt att ge en formel för funktionen $\mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$. Men även negativa rationella tal bildar en uppräknelig mängd (man kan byta alla tecken i figur 2 och resonera som tidigare eller utnyttja funktionen $f(x) = -x$ som ger en bijektion mellan alla positiva och alla negativa rationella tal). Om vi nu tar A = alla positiva rationella tal och B = alla negativa rationella tal så får vi enligt Lemma (10) att $\mathbb{Q} = A \cup B \cup \{0\}$ är uppräknelig ($A \cup B$ är uppräknelig som union av två uppräkneliga mängder och $(A \cup B) \cup \{0\}$ är uppräknelig som union av en uppräknelig och en ändlig mängd). $\square$

Övning C

- (a) Visa att alla naturliga tal delbara med 3 bildar en uppräknelig mängd.
(b) Visa att alla heltal delbara med 3 bildar en uppräknelig mängd.

Ledning. Dessa mängder består av alla tal av typen $3k$, där k tillhör $\mathbb{N}$ resp. $\mathbb{Z}$.

Övning D

Hilberts* hotell. I Hilberts hotell finns oändligt många rum numrerade $1, 2, 3, \dots$. Hilbert berättade hur en matematiker löste problemet med sin inkvartering då han fick veta att alla rum var upptagna. Matematikerns förslag till ägaren var att flytta gästen i rum nr 1 till rum nr 2, gästen i rum nr 2 till rum nr 3 osv. På det sättet kunde alla gäster få rum och matematikern kunde ta i besittning rum nr 1. I verkligheten har hotellet obegränsade möjligheter att ta emot gäster. Försök experimentera!

- Det kommer en buss med 50 nya gäster. Hur kan de få var sitt rum då alla rum är upptagna?
- Det kommer oändligt många nya gäster (uppräkneligt många). Hur löser man deras inkvartering i Hilberts hotell?

Nu ger vi exempel på en mycket viktig icke-uppräknelig mängd:

(12) Sats. $\mathbb{R}$ är inte uppräknelig.

Bevis. Antag motsatsen, dvs att man kan bilda en följd av alla reella tal. Då kan man också bilda en följd av alla reella tal i intervallet $(0,1)$ (som en delföljd av alla reella tal):

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\dots \\x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n}\dots \\&\dots\dots\dots \\x_i &= 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}\dots a_{in}\dots \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

där a_{in} är n :te decimalsiffran i en decimalutveckling av x_i . Betrakta nu talet

$$x = 0, b_1b_2b_3\dots b_n\dots,$$

*David Hilbert (23/1 1862 – 14/2 1943) var en av de mest framstående matematikerna genom tiderna. Hans bidrag till matematiken täcker flera viktiga områden. År 1900 vid Matematikernas världskongress i Paris formulerade Hilbert 23 problem som enligt honom förtjänade stort matematiskt intresse. Dessa problem sysselsatte många matematiker under hela seklet, men några väntar fortfarande på sin lösning. Den senaste världskongressen ägde rum i Beijing i augusti 2002, och nästa sker i Madrid i augusti 2006.

där

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{om } a_{ii} \neq 1, \\ 2 & \text{om } a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Trots att talet x ligger i intervallet $(0, 1)$ kan det inte finnas bland talen $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ därför att i :te decimalsiffran av x inte är lika med i :te decimalsiffran av x_i så att $x \neq x_i$ [†] för $i = 1, 2, \dots$ $\square$

Den sista satsen visades av G. Cantor[‡] 1872. En av dess konsekvenser är att de irrationella talen är ”fler” än de rationella därför att de irrationella talen bildar en icke-uppräknelig mängd, medan de rationella bildar en uppräknelig. Tag nämligen $A =$ rationella tal och $B =$ irrationella tal. Då är $\mathbb{R} = A \cup B$ och eftersom A är uppräknelig så måste B vara icke-uppräknelig ty annars är $A \cup B$ uppräknelig enligt Lemma (10). Vi vet redan att t ex $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal. Trots att de irrationella talen är ”fler” än de rationella kan det tyckas som att det är svårare att ge exempel på irrationella tal än på rationella. Så är dock inte fallet: så snart vi har ett irrationellt tal har vi oändligt många, ty om a är irrationellt och r är rationellt så är $a + r$ irrationellt (Visa detta! Om $r \neq 0$ så är f ö även ar irrationellt), så varje irrationellt tal ger upphov till lika många irrationella tal som det finns rationella tal.

Cantor visade ett annat resultat om talmängder, som spelade en mycket viktig roll i matematikens utveckling och befäste betydelsen av hans teori, nämligen att de s k *transcendent*a talen (som t ex π och e) är fler än de *algebraiska*, dvs rötter till polynomekvationer med rationella koefficienter. Beviset går ut på att visa att mängden av sådana ekvationer är uppräknelig.

[†] x kan inte ha två olika decimalutvecklingar därför att om ett tal har två olika decimalutvecklingar så har en av dem oändligt många siffror 0, och den andra, oändligt många siffror 9.

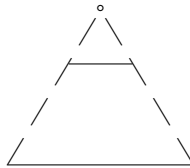
[‡]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) en tysk matematiker som lade grunden för den moderna mängdteorin.

ÖVNINGAR

Dags nu för några fler övningar om begreppen funktion, ändligt, oändligt, kardinalitet och uppräknelighet. I första hand rekommenderas uppgifterna A till F.

Övning E

1. Visa att två godtyckliga sträckor (med ändpunkterna) har samma kardinalitet (dvs punkterna på dessa sträckor kan paras ihop bijektivt).

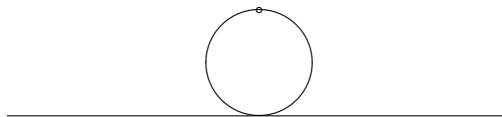


2. Visa att två godtyckliga cirklar (med olika radier) har samma kardinalitet.



3. Visa att en cirkel utan en punkt har samma kardinalitet som en rät linje i planet.

Ledning. Placera cirkeln på linjen som bilden visar och försök para ihop punkterna på cirkeln med punkterna på linjen.



Övning F

1. Låt A vara mängden av alla möjliga följder

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots,$$

där varje a_i är lika med antingen 0 eller 1. Visa att mängden A inte är uppräknelig.

Ledning. Uppgiften är ganska svår, men lösningen är enklare än beviset ovan att de reella talen bildar en icke-uppräknelig mängd. Du kan härma det beviset. Antag att det går att skriva ut alla följder av 0 och 1:

$$\begin{array}{l} a_{11}a_{12}a_{13} \dots \\ a_{21}a_{22}a_{23} \dots \\ a_{31}a_{32}a_{33} \dots \\ \dots \end{array}$$

Konstruera därefter en följd som med all säkerhet inte finns bland de utskrivna.

Övning G

1. Låt oss betrakta en oändlig trädgård med oändligt många träd som växer längs en rät linje. Motivera att trädmängden är uppräknelig (ge ett recept för hur träden kan numreras).
2. Visa att varje mängd av parvis disjunkta sträckor på en rät linje är uppräknelig. Ser Du en likhet med förra uppgiften?
3. Tänk Dig nu en oändlig trädgård med oändligt många träd som växer överallt. Visa att trädmängden är uppräknelig (som ovan ge ett recept för hur träden kan numreras).

Ledning. Uppgiften är ganska svår. Tänk på ett träd som en liten cirkel i planet. Cirkelns centrum (a, b) kan väljas så att a och b är två rationella tal. Därefter kan man utnyttja två tidigare övningar.

Övning H

Två något svårare uppgifter:

1. Visa att en sträcka med ändpunkter har samma kardinalitet som en sträcka utan ändpunkter (eller ett intervall $[a, b]$ har samma kardinalitet som intervallet (a, b) – Du får välja $a = 0$ och $b = 1$).
2. Visa att sträckan $(0, 1)$ har samma kardinalitet som halvlinjen $(1, \infty)$ (alternativt: $(0, \infty)$ eller $(-\infty, 0)$).

Ledning. Den andra uppgiften är något enklare än den första. Du kan utnyttja t ex funktionen $f(x) = 1/x$ eller 2^x .

Följande övning i boken rekommenderas:

Vretblad/(Ekstig): 3.8