

# Explorativ övning euklidisk geometri

De viktigaste begreppen och satser i detta avsnitt är:

- Kongruens och likhet mellan sträckor, vinklar och trianglar.
- Kongruensfallen för trianglar.
- Parallella linjer (likbelägna vinklar och alternativvinklar).
- Yttervinkelsatsen, vinkelsumman i en triangel.
- Längd och area.
- Likformighet av trianglar och likformighetsfallen.
- Pythagoras sats.
- Några viktiga satser om trianglar (bisektriser, medianer, höjder).
- Konstruktioner med passare och linjal.

Vi skall också utnyttja kunskaper från detta avsnitt för att få bättre förståelse av vad man menar med deduktiv vetenskap och axiomatisk metod i matematiken.

Övning **A** handlar om avsnitt 4 i kompendiet, **B** och **C** om avsnitt 5, för **D**, **E** och **F** behövs t o m avsnitt 6, **G** t o m 7, **H**, **I** och **J** t o m 8, **K**, **L** och **M** t o m 9, **N** handlar om avsnitt 10, **O** och **P** t o m 12 och för de övriga behövs också sista avsnittet.

I första hand försök lösa uppgifterna **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **G**, **H**, **I**, **J**, **K**, **L**, **N**, **Q**, **R**, **S**.

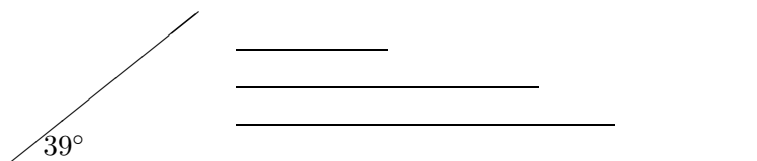
## Övning A

Läs om "Axiom och primitiva begrepp" i kompendiet. Försök därefter besvara följande frågor och diskutera svaren i din grupp:

1. Hur kan man föreställa sig en axiomatisk teori? Vad är ett primitivt begrepp? Vad är ett axiom? Försök svara på dessa frågor genom att jämföra axiomatisk teori med ett spel t ex schack. Vad är "primitiva begrepp" i schackspel? Vad är axiomen?
2. Ge exempel på några definitioner (t ex av några geometriska figurer eller parallella linjer). Vilken roll spelar definitionerna och varför är de viktiga? Försök svara på dessa frågor genom att jämföra definitionerna med förklaringar av ord i ett främmande språk (eller främmande ord i svenskan).
3. Vad är skillnaden mellan axiom och satser? Ge exempel på ett axiom och ett exempel på en sats.

## Övning B

Syftet med uppgiften är att konstruera trianglar med givna sidor eller vinklar. Det underlättar att använda en markerad linjal och gradskiva. Det går också att bara använda passare och linjal, och en given vinkel på  $39^\circ$  och fyra sträckor, 2, 4, 5 och 7 cm.:

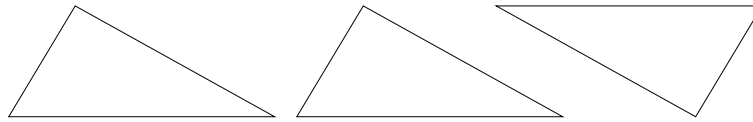


1. Konstruera en liksidig triangel med sidolängd 4 cm.
2. (S-V-S) Konstruera en triangel  $\triangle ABC$  med  $\angle A = 39^\circ$ ,  $\overline{AB} = 5$  cm och  $\overline{AC} = 4$  cm.
3. (V-S-V) Konstruera en triangel  $\triangle ABC$  med  $\angle A = 39^\circ$ ,  $\overline{AB} = 5$  cm och  $\angle B = 45^\circ$ .
4. (V-V-S) Konstruera en triangel  $\triangle ABC$  med  $\angle A = 39^\circ$ ,  $\overline{AB} = 5$  cm och  $\angle C = 45^\circ$ .
5. (S-S-S) Konstruera en triangel  $\triangle ABC$  med  $\overline{AB} = 5$  cm,  $\overline{AC} = 4$  cm och  $\overline{BC} = 2$  cm. Går det att konstruera en triangel med  $\overline{AB} = 7$  cm,  $\overline{AC} = 4$  cm och  $\overline{BC} = 2$  cm?
6. (S-S-V) Konstruera en triangel  $\triangle ABC$  med  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\overline{AC} = 4$  cm och  $\overline{CB} = 3$  cm. Vad händer om i stället  $\overline{CB} = 5$  cm; och om  $\overline{CB} = 2$  cm?

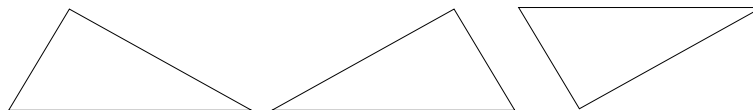
## Övning C

1. Vad menas med att två trianglar är lika? När säger man att två trianglar är kongruenta?

2. Är följande trianglar lika? Är de kongruenta?



3. Samma fråga som ovan om trianglarna:



4. Vad är skillnaden mellan de båda fallen ovan?
5. Vad behöver man veta enligt definitionen av kongruensbegreppet mellan trianglar för att kunna konstatera att två trianglar är kongruenta? Är det nödvändigt att alla villkor i definitionen (6 stycken) gäller? Vilken information räcker för att sluta sig till att två trianglar är kongruenta?
6. Försök definiera kongruensbegreppet för fyrhörningar. Formulera dina egna "kongruensfall" för två fyrhörningar (tänk inte för länge på uppgiften).

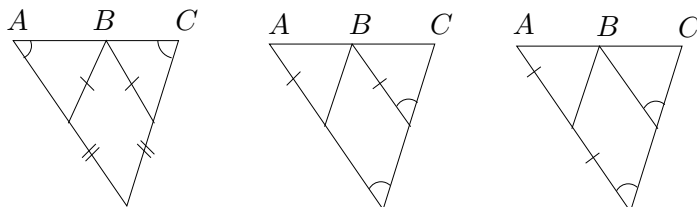
## Övning D

**Denna övning handlar om parallelogrammer.**

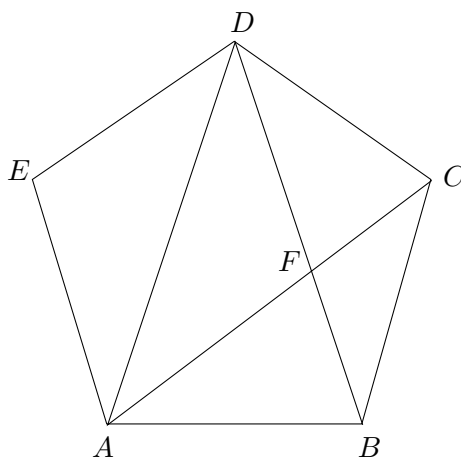
- Vet du vad en parallelogram är?  
Vi definierar en parallelogram som fyrhörning där motstående sidor är parvis parallella.
- Visa att motstående vinklar i en parallelogram är kongruenta.
- Visa att motstående sidor i en parallelogram är kongruenta.
- Visa att om alla vinklar i en fyrhörning är räta, så är fyrhörningen en parallelogram (en sådan parallelogram kallas för rektangel).
- I parallelogrammen  $ABCD$  är  $\angle A$  rät. Visa att  $ABCD$  är en rektangel.
- Visa att om i en fyrhörning motstående sidor är lika stora, så är fyrhörningen en parallelogram.
- Visa att diagonalerna i en parallelogram delar varandra mitt itu.

## Övning E

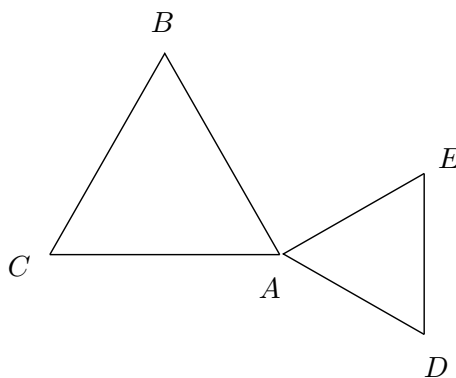
1. I vilka av följande figurer kan man *säkert* säga att  $B$  är mittpunkt på  $AC$ , och i vilka figurer är det *inte säkert* att  $B$  är mittpunkten. Motivera ett positivt svar eller ge ett motexempel. (Man ska inte lita på figuren, men bara utnyttja de markerade kongruenser).



2. Bestäm vinkelsumman i en  $n$ -hörning.
3. I en regelbunden femhörning  $ABCDE$  är diagonalerna  $AC$ ,  $AD$  och  $DB$  dragna. Bestäm vinklarna i trianglarna  $\triangle ABC$  och  $\triangle ABD$ . Vilka trianglar i figuren är kongruenta?

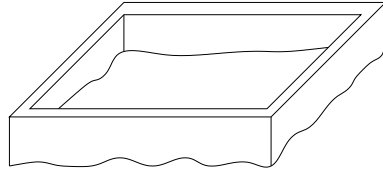


4. Låt  $\triangle ABC$  och  $\triangle ADE$  vara två liksidiga trianglar med gemensam hörn  $A$ , enligt figur. Visa att  $|CE| = |BD|$ , samt bestäm den vinkel under vilken linjerna  $CE$  och  $BD$  skär varandra. (Undersök gärna vad som händer om man vrider  $\triangle ADE$  kring hörnet  $A$ ).



## Övning F

Många människor (alla snickare) vet hur man genom att enbart mäta längder (med t ex ett måttband) kan kontrollera om en husgrund (eller ett rum, o s v) är rektangulär. (Om ni inte vet ingår det i uppgiften att tänka ut detta).



1. Skriv upp alla steg i en sådan process.
2. Bevisa att metoden är korrekt.
3. Diskutera värdet med att ge ett sådant bevis: bra/dåligt? Varför?

## Övning G

### Konstruktioner med passare och linjal.

1. Konstruera bisektrisen till en given vinkel (bisektrisen är den stråle som delar vinkeln mitt itu).
2. Givet en linje  $l$  och en punkt  $P$  utanför linjen, konstruera en linje genom  $P$ , parallell med  $l$ .
3. Givet en cirkel, konstruera en inskriven sexhörning.

## Övning H

### Denna övning handlar om längd och mätning.

1. Redan tidigare användes begreppet längd av en sträcka (hur?). Man tar väl för givet att varje sträcka kan tillordnas ett måtetal, som är ett positivt reellt tal. Diskutera vad som menas med detta.
2. Vad menas med en enhet? Kan en enhet delas? Kan den delas hur många gånger som helst?
3. Två sträckor är kommensurabla, om förhållandet mellan deras längder är rationellt. Är sidan och diagonalen i en kvadrat kommensurabla?
4. Hur kan man avgöra om två sträckor är kommensurabla?
5. Vad menas med avståndet mellan två (parallella) linjer? Hur mäter man det?

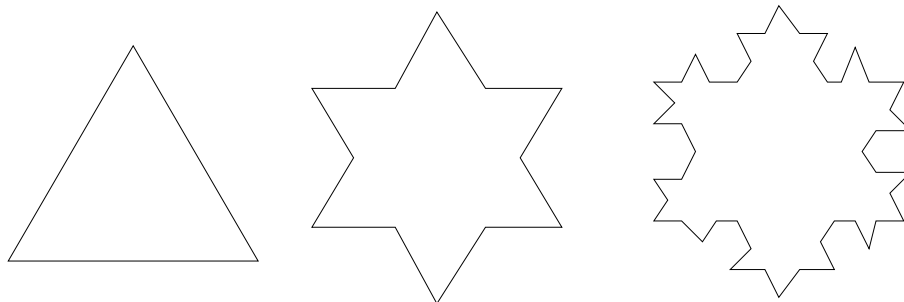
## Övning I

1. Vet du vad *area* är? Vad är en yta. Vad är skillnaden?
2. Låt  $ABCD$  och  $ABC'D'$  vara två parallelogrammer med samma bas  $AB$  och samma höjd, d v s  $C'$  och  $D'$  ligger på linjen  $CD$ . Visa att de har samma area. (Ledning: lägg till och drag ifrån sinsemellan kongruenta trianglar). Drag slutsatsen att arean för en parallelogram är lika med basen gånger höjden.
3. Visa att arean av en triangel är  $\frac{1}{2}$  basen  $\cdot$  höjden .
4. Låt  $CM$  vara medianen genom hörnet  $C$  i triangeln  $ABC$  (d v s  $M$  är mittpunkt på  $AB$ ). Visa att trianglarna  $\triangle AMC$  och  $\triangle BMC$  har samma area.
5. I  $\triangle ABC$  är  $|AB| = 16$ ,  $|BC| = 22$  och höjden genom  $C$  är 11. Beräkna längden av höjden genom  $A$ .

## Övning J

1. Kan det vara så att en figur med ändlig area kan ha en godtycklig stor omkrets?

Vi studerar von Kochs 'snöflingestjärna'.



Om vi kallar de olika stjärnorna  $S_i$  med triangeln  $S_1$  som början, så kan vi beskriva att man får  $S_{i+1}$  ur  $S_i$  genom att sätta en liksidig triangel på den mittersta tredje delen av varje sida (och att ta bort dubbla sträckor).

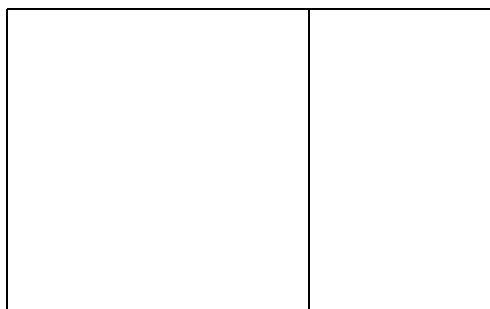
2. Beräkna längden av omkretsen av stjärna  $S_n$ .
3. Vad händer med omkretsen då  $n \rightarrow \infty$ ?

## Övning K

### Likformighetsbegreppet.

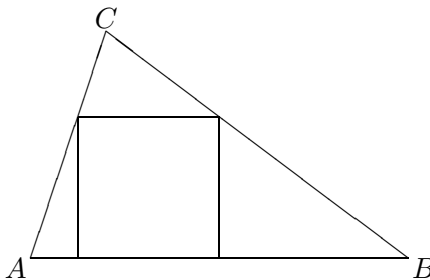
1. Tänk igen på vad som menas med att två figurer är lika, är kongruenta, är likformiga (har "samma form").

2. Vad menas med att två trianglar är likformiga? Jämför med kongruensdefinitionen. Vad behöver man veta enligt definitionen av likformighetsbegreppet mellan trianglar för att kunna konstatera att två trianglar är likformiga? Är det nödvändigt att alla villkor i definitionen (6 stycken) gäller? Vilken information räcker för att sluta sig till att två trianglar är likformiga?
3. Behöver två figurer som är likformiga vara kongruenta och/eller lika? Varför/varför inte? Är två kvadrater likformiga? När är de lika eller kongruenta?
4. **Gyllene snittet:** hitta en rektangel sådan att om man tar bort en kvadrat så återstår en rektangel som är likformig med den ursprungliga (d v s beräkna förhållandet mellan sidorna).



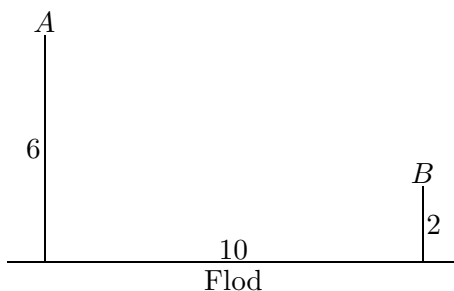
## Övning L

1. Ange vilka trianglar i figuren av uppgift E.3 är likformiga.
2. Låt  $D$  vara mittpunkten på sidan  $AC$  i  $\triangle ABC$  och  $E$  mittpunkten på  $BC$ . Drag  $DE$  och diagonalerna  $AE$  och  $BD$ . Vilka trianglar är nu likformiga?
3. I triangeln  $\triangle ABC$  är  $A'$  mittpunkten på  $BC$ ,  $B'$  mittpunkten på  $AC$  och  $C'$  mittpunkten på  $AB$ . Visa att  $\triangle A'B'C'$  är likformig med  $\triangle ABC$ .
4. I en triangel  $\triangle ABC$  är en kvadrat inskriven med en sida efter sidan  $AB$ . Längden av sidan  $AB$  är 10, och höjden mot denna sida är 6. Bestäm längden av kvadratens sida.



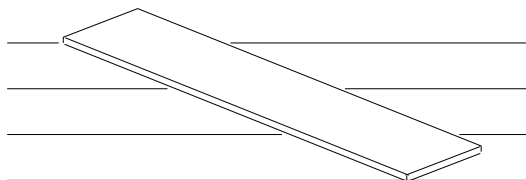
5. En myrslok som befinner sig i  $A$  skall gå till floden för att dricka och sedan gå till  $B$  för

att sova. Hur lång blir hans vandring om de göres så kort som möjligt?



### Övning M

- Om man vill dela en bräda i 3 lika delar så kan man skaffa sig 4 parallella linjer (t ex springor i ett parkettgolv) med lika avstånd.



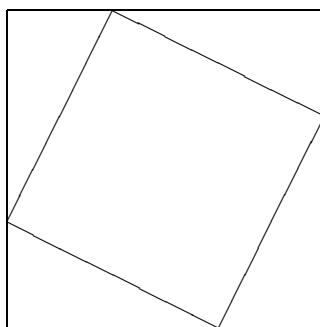
Ni får förtydliga metoden själva. Verkar den praktisk? Varför är den korrekt? (Ge ett bevis!).

- Hitta på en metod att dela brädan i förhållandet  $2 : 5$ ,  $1 : 4$ ,  $1 : n$ ,  $m : n$ .

### Övning N

#### Pythagoras sats.

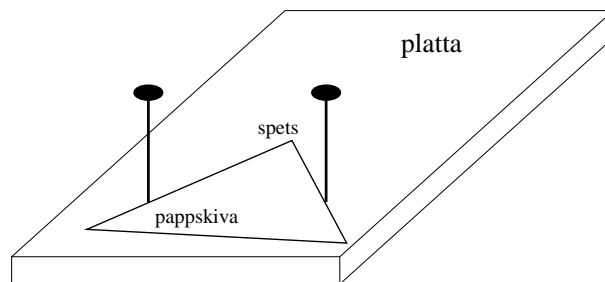
- Formulera satsen.
- Tag reda på så många bevis för Pythagoras sats som du kan.
- Gör ett bevis med hjälp av areaberäkningar i figuren:





## Övning O

Betrakta följande experimentuppställning bestående av en platta med två spikar och en triangelformad pappskiva. Gör en egen (plattan kan ersättas med en pappersark med två markerade punkter).



Om pappskivan skjutes in mot spikarna kommer spetsen att hamna i en bestämd punkt — markera denna punkt. Variera nu detta förfarande och du får en mängd punkter. Dessa punkter hamnar på en kontinuerlig kurva (varför?). Hur ser kurvan ut? Kan du bevisa ditt förmodan?

## Övning P

Om du befinner dig på havet och ser t ex två fyrar under konstant vinkel — trots att du rör dig — vad betyder det? Kan du hitta på ett sätt att kontrollera att du inte rör dig? (Detta kan vara viktigt om man ligger för ankar på redde.)

## Övning Q

1. De tre medianerna i en triangel delar upp triangeln i sex mindre trianglar. Visa att de sex trianglarna har samma area.
2. Två cirklar skär varandra i punkterna  $A$  och  $B$ . Punkten  $C$  ligger på den första cirkeln diametral mot  $A$  och punkten  $D$  diametral mot  $A$  på den andra cirkeln. Visa att  $B$ ,  $C$  och  $D$  ligger på en linje.
3. Hur långt är det till horisonten från toppen av Eiffeltornet. Tornet är 300 m högt och jorden antas vara ett klot med en radie på 600 mil.

## Övning R

Låt  $\triangle ABD$  vara en likbent triangel och  $C$  mittpunkten på  $AD$ . Antag att  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$  och  $|AB| = |DB| = c$ , där  $a^2 + b^2 = c^2$ . Bestäm avståndet mellan  $B$  och

- (a) medianernas skärningspunkt,

- (b) bisektrisernas skärningspunkt,
- (c) mittpunktsnormalernas skärningspunkt,
- (d) höjdernas skärningspunkt.

Observera att all dessa punkter ligger på linjen  $BC$ .

## Övning S

### Mer konstruktioner med passare och linjal.

1. Givet en cirkel och en punkt  $P$  utanför cirkeln, konstruera de tangenter till cirkeln som går genom  $P$ .
2. Tre sträckor med längderna 1,  $a$  och  $b$  är givna. Beskriv hur man konstruerar en sträcka med längden  $a/b$ .
3. En enhetssträcka är given. Visa hur man utgående från denna kan konstruera en sträcka med längden  $\sqrt{7}$ .
4. Förklara hur man utan att mäta kan addera och subtrahera kvadrater med hjälp av Pythagoras sats (dvs med passare och linjal konstruera en kvadrat vars area är summan respektive skillnaden av areorna av två givna kvadrater).

## Övning T

Varför vänder en spegel på höger och vänster, men inte på upp och ner, och vad händer om du inte står men ligger framför spegeln?