MATEMATIK lf/js
Göteborgs universitet

Lösningar till tentamensskrivningen
LMA 110 , Matematik för lärare 1, del 2, 20080605

1. **Visa bisektrissatsen: bisektrisen till en vinkel i en triangel delar motstående sida i delar som är proportionella mot de övriga sidor.**

   Se kompendiet om Euklidisk geometri.

2. **Bestäm en ekvation för planet som innehåller punkterna** $(-1, 0, 0)$ **och** $(2, 1, 1)$**, och som är parallellt med linjen** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$**.**

   Normalvektorn till planet är vinkelrät mot vektorerna $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och fås som vektorprodukt $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$.
   Ekvationen är $3x - 5y - 4z = -3$.

3. **Bestäm minsta avståndet från punkten** $(2, 1, 0)$ **till linjen genom punkterna** $(1, 2, 3)$ **och** $(4, 5, 6)$**.**

   Linjen genom $(1, 2, 3)$ och $(4, 5, 6)$ ges i parameterform av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och avståndet är minst i punkten där planet genom punkten $(2, 1, 0)$, vinkelrät mot linjen, skär linjen. Planet har ekvation $x + y + z = 3$. I skärningspunkten gäller $6 + 3t = 3$, så $t = -1$. Skärningspunkten är $(0, 1, 2)$ och avståndet till punkten $(2, 1, 0)$ är längden av vektorn $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, som är $2\sqrt{2}$.

4. **Visa parallellogramsatsen: Om** $ABCD$ **är en parallellogram så är**

   $$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 \ .$$

   Bevis med vektorräkning: observera att $|CD| = |AB| = |\overrightarrow{AB}|$ och $|BC| = |AD| = |\overrightarrow{AD}|$. Vidare är $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ och $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. Så $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{AD}|^2$ och $|AC|^2 + |BD|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + |\overrightarrow{AD}|^2 = 2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{AD}|^2$.

5. **Hitta ett enkelt uttryck för**

   $$1 + \sum_{i=0}^{n} 2^i$$

   och bevisa med induktion att ditt uttryck är korrekt.

Jag låter $s(n) = 1+\sum_{i=0}^{n} 2^i$ och börjar med att räkna några värden: $s(0) = 1+2^0 = 1+1 = 2$, $s(1) = 1+2^0+2^1 = 1+1+2 = 4$, $s(2) = 1+1+2+4 = 8$, $s(3) = 1+1+2+4+8 = 16$. Det mönster som jag ser verkar indikera att $s(n) = 2^{n+1}$. Vi skall se om detta stämmer för alla n.
Låt P(n) vara påståendet att $s(n) = 2^{n+1}$. Vi skall bevisa att P(n) är sant för alla naturliga tal n med hjälp av induktion.
Basfall: För $n = 0,\ s(0) = 1 + 2^0 = 1 + 1 = 2 = 2^1$: påståendet P(0) stämmer. (man kan om man föredrar börja med $n = 1,\ s(1) = 4 = 2^2$ och konstatera att påståendet P(1) stämmer.)
Induktionssteg: Antag att P(k) stämmer för något naturligt tal k, dvs. att $s(k) = 2^{k+1}$. Vi skall nu visa att det medför att även P(k+1) stämmer.
P(k+1) är påståendet att $s(k+1) = 2^{k+2}$. För att bevisa det försöker vi räkna ut $s(k+1)$. Vi skriver om $s(k+1) = 1+\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 1+(\sum_{i=0}^{k} 2^i)+2^{k+1} = s(k)+2^{k+1}$ och kan använda induktionsantagande för att skriva $s(k+1) = 2^{k+1} + 2^{k+1} = 2^{k+2}$ vilket ger det önskade uttrycket. Så vi har visat att P(k) medför P(k+1).
Slutsats: Enligt induktionsprincipen gäller P(n) för alla naturliga tal n.

6. **Beräkna SGD för polynomen $f(x) = x^4-2x^3-x^2+6x-6$ och $g(x) = x^3+3x^2-8x+10$. Ange rötter och faktorisering för $f(x)$ och $g(x)$ i $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{Q}[X]$.**

Jag använder Euklides algoritm för att hitta SGD av två polynom (man kan också gissa nollställe, faktorisera polynomen och samla de gemensamma delarna, men det förutsätter att det finns "lätta" nollställe att gissa). Jag börjar med att utföra långdivision av f(x) med g(x). Eftersom det är krångligt att skriva ut en liggande stol i textbehandlaren, skriver jag bara resultatet här: vi får kvot $x - 5$ och rest $22x^2 - 44x + 44$, dvs

$$f(x) = (x - 5)g(x) + 22(x^2 - 2x + 2)$$

Sedan utför jag långdivision av g(x) med resten (eller med $x^2 - 2x + 2$, som är ekvivalent med resten) och får kvot $x + 5$ och rest noll, dvs.

$$g(x) = (x + 5)(x^2 - 2x + 2)$$

Så $x^2 - 2x + 2$ är SGD för $f(x)$ och $g(x)$.
Vi har fått mycket information som vi kan använda för att ange faktorisering av $f(x)$ och $g(x)$. Eftersom $x^2-2x+2 = (x-1-i)(x-1+i)$ (lös andragradsekvationen $x^2-2x+2 = 0$ för att hitta nollställena och faktoriseringen) har vi $g(x) = (x + 5)(x^2 - 2x + 2) = (x + 5)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$ Den sista faktoriseringen gäller i $\mathbb{C}[X]$ (rötterna är $x_1 = -5$, $x_2 = 1+i$, $x_3 = 1-i$) men bara $g(x) = (x+5)(x^2-2x+2)$ gäller i $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{Q}[X]$ (en enda rot: $x_1 = -5$).
För att faktorisera $f(x)$ kan man dividera polynomet med x^2-2x+2, eller använda $f(x) = (x - 5)g(x) + 22(x^2 - 2x + 2) = (x - 5)(x + 5)(x^2 - 2x + 2) + 22(x^2 - 2x + 2) = ((x-5)(x+5)+22)(x^2-2x+2) = (x^2-25+22)(x^2-2x+2) = (x^2-3)(x^2-2x+2)$ Detta ger faktoriseringen i $\mathbb{Q}[X]$, och $f(x)$ har inga nollställe i $\mathbb{Q}$. I $\mathbb{R}[X]$ kan man gå ett steg längre: $f(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - 2x + 2)$, och hitta rötterna $\sqrt{3}$ och $-\sqrt{3}$, medans i $\mathbb{C}[X]$ gäller även $f(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 1 - i)(x - 1 + i)$, med rötterna $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $1+i$, $1-i$.

7. **Lös ekvationen $z^3 = 4(1 - i\sqrt{3})$ både algebraiskt och grafiskt (med "grafiskt" menas att du ritar lösningarna i det komplexa planet och förklara hur man ser att just dessa punkter uppfyller ekvationen).**

Jag skriver först z^3 i polär form för att kunna lösa ekvationen algebraiskt: Jag känner igen $1 - i\sqrt{3} = 2\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} = 2e^{-i\pi/3}$. Så $z^3 = 4(1 - i\sqrt{3}) = 8e^{-i\pi/3}$
Man kan istället räkna ut absolutbelopp och argument för z^3: $|z^3| = \sqrt{4^2 + 4^2 \cdot 3} = \sqrt{4^2 \cdot 4} = \sqrt{4^3} = 2^3 = 8$ och $\arg(z^3) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3$.
OBS! Det hjälper att samtidigt rita ut z^3 i planet, så man inte gör misstaget $\arg(z^3) = \arccos(1/2) = \pi/3$. Båda vinklar $\pi/3$ och $-\pi/3$ har cosinus lika med $1/2$.
Nu har jag fått fram ett bra uttryck för z^3, men det är egentligen z jag är intresserad av, som har absolutbelopp tredje roten av absolutbeloppet för z^3, och argument en tredjedel av argumentet för z^3, eller det plus multipler av $2\pi/3$.
Jag får $z_0 = 2e^{-\pi/9}$, $z_1 = 2e^{-\pi/9+2\pi/3}$, $z_2 = 2e^{-\pi/9+4\pi/3}$, dvs $z_0 = 2e^{-\pi/9}$, $z_1 = 2e^{5\pi/9}$, $z_2 = 2e^{11\pi/9}$. (Det går lika bra att skriva $z_k = 2(\cos(-\pi/9+2k\pi/3)+i\sin(-\pi/9+2k\pi/3))$ för $k = 0, 1, 2$ och räkna ut vinklarna).
Figuren ritar jag inte här med ordbehandlaren, men man börjar med att rita ut z^3 i planet, tack vara koordinaterna $(4, -4\sqrt{3})$. Har man räknat ut absolutbelopp, så vet man att lösningarna z_k ligger på en cirkel med radie 2 och centrum i origo. Där kan man rita ut z_0, med argument en tredjedel av z^3:s argument, och sedan de andra två lösningarna, som ligger på samma cirkel, med vinkel $2\pi/3$ mellan varje par av lösningar.

8. En funktion kan uttryckas som en relation. Till exempel kan kvadreringsfunktionen på heltalen $x \mapsto f(x) = x^2$ anges av relationen

$$Q = \{(x, x^2); x \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Ge exempel på relationer som är funktioner, och sådana som inte är funktioner. Vad krävs av en relation för att den skall vara en funktion?

Om man tänker på modellen av en funktion som en låda, så skall man inte ha två olika utfall på en och samma input. Tänker man på Venn diagram med pilar, så skall man inte ha fler än en pil från ett element i startmängden.
Detta kan uttryckas formellt med att en given relation är en funktion om det inte förekommer två par (x, y) och (x, z) med samma första komponent men olika andra komponent (med andra ord, om (x, y) och (x, z) tillhör relationen, så är $y = z$.)
Exempel på relationer som är funktioner:

$$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

$$S = \{(0, 1), (1, 34), (2, 5), (3, 453)\}$$
$$T = \{(x, |x|), x \in \mathbb{R}\}$$

Exempel på relationer som inte är funktioner:

$$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$$

$$T = \{(x, y) : y^2 = x, x, y \in \mathbb{R}\}$$

OBS! Att vissa relationer kan uttryckas med hjälp av formler eller en global beskrivning av sambandet är irrelevant. Likaså har inte begreppen reflexivitet, symmetri, transitivitet, med definition av en funktion att göra.