Explorativ övning Vektorer

Syftet med denna övning är att ge grundläggande kunskaper om vektorräkning och dess användning i geometrin.

Liksom många matematiska begrepp kommer vektorbegreppet från fysiken. Ordet vektor introducerades 1846 av den engelska matematikern W. R. Hamilton, men redan långt innan representerades och sammansatts krafter som vektorer. Senare kom vektorer också att användas för att beskriva andra fysikaliska storheter som har storlek och riktning, t ex elektrisk fältstyrka.

Vi ska tillämpa vektorer i euklidisk geometri. Vi utser en godtycklig punkt O till **origo** och fixerar en längdenhet.

Definition. En vektor är en riktad sträcka som börjar i origo.

Notation. Vi ritar en vektor, som slutar i en punkt A, som pil med fotpunkt O och spets i punkten A, och skriver $\overrightarrow{OA}$, eller $\boldsymbol{a}$ (eller $\bar{a}$, eller $\vec{a}$, eller ...).

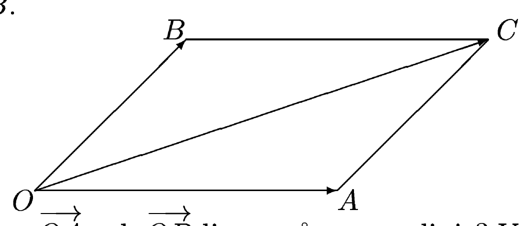
Vektorns **längd** eller belopp är sträckans längd och skrivs som $|\overrightarrow{OA}|$, $|\boldsymbol{a}|$.

En punkt A bestämmer entydigt en vektor, nämligen $\overrightarrow{OA}$, som kallas för **ortsvektor** för A.

Vektorn $\overrightarrow{OO}$ med fotpunkt och spets i O kan inte ritas som pil. Detta är en degenererad riktad sträcka. Vektorn $\overrightarrow{OO}$ kallas fär nollvektor och skrivs också som $\mathbf{0}$.

LMA110, vt 08

Definition: addition av vektorer. Summan $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ är den riktade diagonalen $\overrightarrow{OC}$ i parallellogrammen $OACB$.



(Hur definieras summan om $\overrightarrow{OA}$ och $\overrightarrow{OB}$ ligger på samma linje? Vad är $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO}$?)

Definition: multiplikation av en vektor med en skalär. Om $\boldsymbol{a}$ är en vektor och λ är ett reellt tal så är $\lambda\boldsymbol{a}$ den vektor som uppfyller

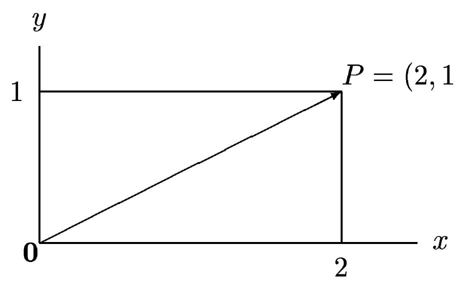
- $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$,
- Om $\lambda > 0$ så har $\boldsymbol{a}$ och $\lambda\boldsymbol{a}$ samma riktning,
- Om $\lambda < 0$ så har $\boldsymbol{a}$ och $\lambda\boldsymbol{a}$ motsatt riktning,
- Om $\lambda = 0$ så är $\lambda\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

En vektor med längd 1 kallas för **enhetsvektor**. För varje nollskild vektor $\boldsymbol{a}$ finns det en enhetsvektor med samma riktning, nämligen $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

Vi introducerar koordinater i planet. Vi väljer två vinkelräta linjer genom origo, som vi kallar för x-axel och y-axel. Eftersom en längdenhet är given finns det en längdskala på båda linjer. Vinkeln från den positiva x-axeln till den positiva y-axeln ska vara moturs. Mot en punkt P_0 i planet ordnas nu ett koordinatpar (x_0, y_0) på följande sätt. Linjen genom P_0, parallell med y-axeln, skär x-axeln i en punkt som har koordinat x_0, medan parallellen med x-axeln skär y-axeln i punkten med koordinat y_0. Omvänt, givet ett talpar (x_0, y_0) får vi en entydigt bestämd punkt P_0 som skärningspunkt av linjer parallella med axlarna. Mängden av par reella tal (x, y) kallas för $\mathbb{R}^2$. På liknande sätt introduceras koordinater i rummet. Mängden av alla (x, y, z) kallas för $\mathbb{R}^3$.

Om P är en punkt i planet med koordinater (x, y) eller i rummet med koordinater (x, y, z), så skrivs motsvarande vektor $\overrightarrow{OP}$ som kolonn: $\binom{x}{y}$, resp $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Beteckningen skiljer alltså mellan punkter och vektorer. Enhetsvektorerna på koordinataxlarna betecknas med $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ och $\boldsymbol{e}_3$. I $\mathbb{R}^2$ har vi $\boldsymbol{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\boldsymbol{e}_2 = \binom{0}{1}$ och i $\mathbb{R}^3$ har vi $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exempel.

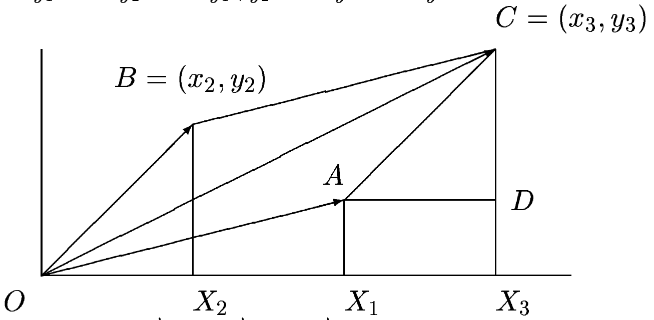


$\overrightarrow{OP} = \binom{2}{1}$

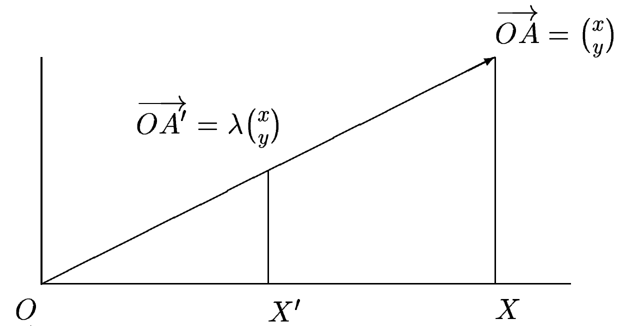
Sats. *För vektorer i* $\mathbb{R}^3$ *gäller*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

Bevis. Eftersom vi bara har behandlat euklidisk geometri i planet visar vi de motsvarande reglerna för vektorer i $\mathbb{R}^2$: $\binom{x_1}{y_1} + \binom{x_2}{y_2} = \binom{x_1+x_2}{y_1+y_2}$, $\lambda\binom{x}{y} = \binom{\lambda x}{\lambda y}$.



Låt $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ och $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$; låt $C = (x_3, y_3)$. Punkterna på x-axeln, som bestämmer respektive koordinat, är X_1, X_2 och X_3. Triangeln $\triangle OX_2B$ är kongruent med triangeln $\triangle ADC$. Fyrhörningen X_1X_3DA är en rektangel. Vi får att $|OX_2| = |X_1X_3|$ och därmed $x_3 = x_1 + x_2$. Likadant visas $y_3 = y_1 + y_2$. Specialfallen, där $\overrightarrow{OA}$ och $\overrightarrow{OB}$ ligger på samma linje, eller en vektor är nollvektorn, lämnas åt läsaren.



Låt nu $\overrightarrow{OA} = \binom{x}{y}$ och $\overrightarrow{OA'} = \lambda\binom{x}{y} = \binom{x'}{y'}$, med koordinatpunkter X och X' på x-axeln. Trianglarna $\triangle OAX$ och $\triangle OA'X'$ är likformiga. Därför är $\overrightarrow{OX'} = \lambda\overrightarrow{OX}$, så $x' = \lambda x$. Likadant är $y' = \lambda y$. $\square$

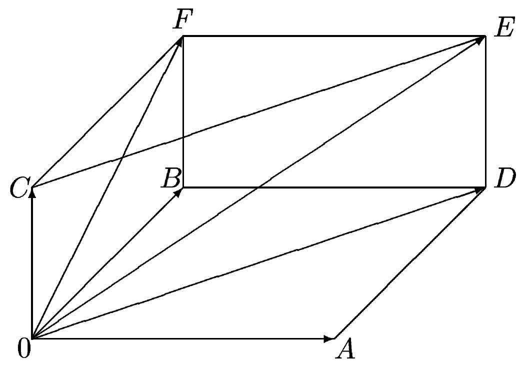
Ur de reella talens egenskaper följer nu lätt:

Räkneregler för vektorräkning. *För alla vektorer* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *och skalärer* λ *och* μ *gäller*

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (*kommutativa lagen*)
2. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ (*associativa lagen*)
3. *om* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$, *så är* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ (*strykningslagen*)
4. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$
5. $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$
6. $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, $\lambda\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
7. $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$
8. $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$

(*distributiva lagar*)

Det går också att direkt visa räknereglerna med geometriska argument. Figuren illustrerar additionens associativitet.

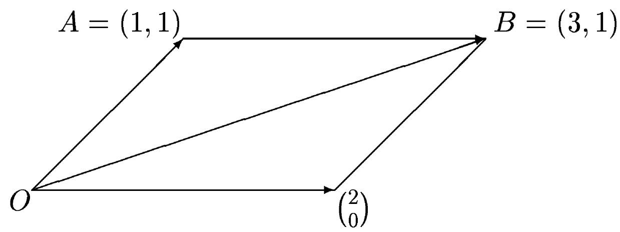


Vi noterar att regel 7 medför att $\boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Vi skriver $-\boldsymbol{a}$ för $(-1)\boldsymbol{a}$. Subtraktion av vektorer definieras nu genom $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{b}$.

För vissa tillämpningar betraktas vektorer med godtycklig fotpunkt, t ex för att beskriva fältstyrka. Då har man i varje punkt i rummet en vektor med denna punkt som fotpunkt. Vektorer kan bara adderas om de har samma fotpunkt.

Vi betraktar bara vektorer av typ $\overrightarrow{OA}$ med fotpunkt O. Vi definierar $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Detta är den vektor med fotpunkt i origo som har samma längd och riktning som den riktade sträckan AB.

Exempel. Låt $A = (1, 1)$, $B = (3, 1)$. Då är $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \binom{3}{1} - \binom{1}{1} = \binom{2}{0}$.



Vi har sett att vektorer kan adderas och subtraheras. Det finns sätt att multiplicera vektorer, men multiplikationen följer inte de vanliga reglerna. Speciellt kan man inte dela vektorer på varandra.

Definition: skalärprodukt. Låt $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ vara vektorer. Låt γ vara vinkeln mellan riktningarna av $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$. Skalärprodukten är talet

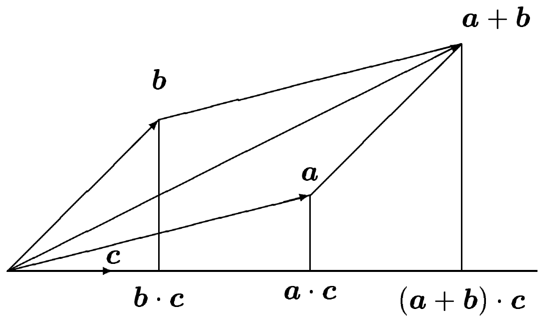
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\gamma \ .$$

Om $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ har samma riktning, så är $\cos\gamma = 1$ och $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. Speciellt är $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$, eller $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$. Det kan vara att $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ utan att $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ eller $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$; detta händer om vinkeln γ är rät. Då säger vi att vektorerna är **ortogonala**. Om $\boldsymbol{e}$ är en enhetsvektor, har vi en längdskala på linjen genom $\boldsymbol{e}$ och $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}$ är lika met det reella talet som tillhör $\boldsymbol{a}$:s ortogonala projektion på linjen.

Räkneregler för skalärprodukt. *För alla vektorer $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ och skalärer λ gäller*

1.	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$	(*kommutativa lagen*)
2.	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$	(*distributiva lagen*)
3.	$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$	
4	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq 0$ och om $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0$, så är $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.	

Reglerna 1, 3 och 4 följer ganska direkt ur definitionen. För regel 2 observerar vi att $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ beror bara på $\boldsymbol{a}$:s ortogonala projektion på linjen genom $\boldsymbol{c}$ (om inte $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, i vilket fall regeln stämmer), och projektionen av $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ är summan av $\boldsymbol{a}$:s och $\boldsymbol{b}$:s projektion. Figuren ilustrerar fallet där $\boldsymbol{c}$ är en enhetsvektor (med regel 3 kan vi alltid reducera till det här fallet).



Sats. *För vektorer i $\mathbb{R}^2$ gäller*

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=x_1x_2+y_1y_2$$

och för vektorer i $\mathbb{R}^3$ gäller

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\ .$$

Bevis. Låt $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$. Om vi projekterar på x-axeln får vi vektorn $\begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix}$. Så $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1=x_1$. Likadant är $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2=y_1$ och $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3=z_1$. Eftersom $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3$ får vi $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=x_2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. Formeln för $\mathbb{R}^2$ visas på samma sätt. $\square$

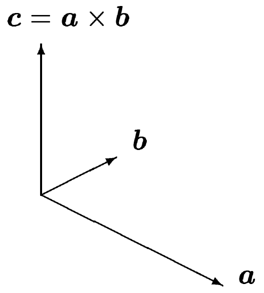
Följdsats. *En vektor $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ har längd $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ och avståndet mellan två punkter (x_1,y_1,z_1) och (x_2,y_2,z_2) är $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.*

Det är också möjligt att multiplicera två vektorer så att resultatet blir igen en vektor, men det funkar bara i $\mathbb{R}^3$. Produkten kallas vektorprodukt, eller efter beteckningen, kryssprodukt.

Definition: vektorprodukt. Låt $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ vara vektorer i rummet. Vektorprodukten $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ är den vektor $\boldsymbol{c}$ som uppfyller

1. $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \gamma$, där γ är vinkeln mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$.
2. $\boldsymbol{c}$ är vinkelrät mot både $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$.
3. tripeln $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ är positivt orienterad.

Orienteringen bestäms med (kork)skruvregeln eller tumregeln: $\boldsymbol{c}$ pekar åt det håll, i vilket tummen på högra handen pekar om pekfingern är i $\boldsymbol{a}$:s riktning och långfingern i $\boldsymbol{b}$:s riktning.



Det följer att vektorprodukten är ej kommmutativ, för $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$. Längden av $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ är lika med arean för parallellogrammen som spänns upp av $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$. Speciellt är $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ om $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ ligger på samma linje.

Räkneregler för vektorprodukt. *För alla vektorer* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *i rummet och skalärer* λ *gäller*

1.	$\boldsymbol{a} \times \mathbf{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$	(*antikommutativa lagen*)
2.	$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$	(*distributiva lagen*)
3.	$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$	
4	$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0.$	

Igen är det bara associativiteten som ger problem. Låt $\boldsymbol{c}$ vara en given vektor. Låt $\boldsymbol{a}'$ vara projektionen av $\boldsymbol{a}$ på planet vinkelrätt mot vektorn $\boldsymbol{c}$. Då är $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$, med riktning som fås genom att rotera $\boldsymbol{a}'$ om $90°$. Nu är projektionen av $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ summan av $\boldsymbol{a}$:s och $\boldsymbol{b}$:s projektion. Sen roterar vi.

Sats. *För vektorer i* $\mathbb{R}^3$ *gäller*

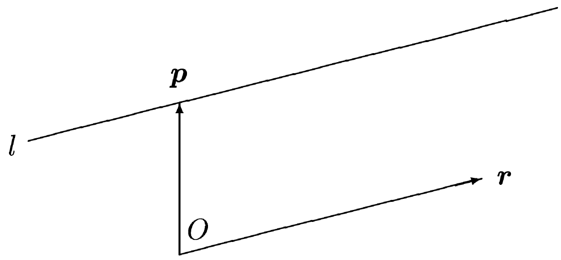
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Bevis. Från definitionen får vi $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2$. Formeln följer genom att beräkna $(x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3) \times (x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + z_2\boldsymbol{e}_3)$. □

Ekvationen för en linje. Alla vektorer som är multipla av varandra, ligger på en och samma linje genom origo. Därför kan vi beskriva en linje genom origo i parameterform som

$$\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{r} \,, \qquad t \in \mathbb{R} \,,$$

där $\boldsymbol{r}$ är en nollskild vektor på linjen.



Varje linje l i planet har en entydig parallell genom origo. En nollskild vektor $\boldsymbol{r}$ på parallellen kallas för **riktningsvektor** för l. Om P är en godtycklig punkt på linjen med ortsvektorn $\boldsymbol{p}$, då får vi linjens ekvation på parameterform som

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{r} \,, \qquad t \in \mathbb{R} \,.$$

Exempel. Bestäm linjen genom punkterna $P_1 = (2, -1, 3)$ och $P_2 = (4, 1, 1)$.

Lösning. En riktningsvektor är $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. En vektor i samma riktning är $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Linjen ges av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,.$$

Vi kan också skriva

$$\begin{aligned} x &= 4 + t \\ y &= 1 + t \\ z &= 1 - t \end{aligned}$$

En linje l i planet kan beskrivas med en linjär ekvation i x och y. Den kan fås genom att lösa ut parametern t, men också på följande sätt. Låt $\boldsymbol{n}$ vara en **normalvektor** till linjen, d v s $\boldsymbol{n}$ ligger på en linje vinkelrät mot l och mot riktningsvektorn $\boldsymbol{r}$ för l. Då är $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = 0$ och för alle $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{r}$ med spets på l gäller $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}$. Detta är den sökta ekvationen, oberoende av t, på formen $ax + by = c$.

Exempel. Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $P_1 = (2,-1)$ och $P_2 = (4,1)$.
Lösning. En riktningsvektor är $\overrightarrow{P_1P_2} = \binom{2}{2}$. En normalvektor $\binom{n_1}{n_2}$ uppfyller $2n_1 + 2n_2 = 0$. Vi väljer $\binom{n_1}{n_2} = \binom{1}{-1}$. Ekvationen blir $x - y = c$, där c bestäms genom att sätta in P_1:s koordinater: $x - y = 2 - (-1) = 3$. Vi kollar resultatet genom att sätta in punkten P_2 i ekvationen $x - y = 3$.

För att beskriva ett plan i rummet i parameterform behövs två riktningsvektorer. Planets ekvation hittar man med samma metod som en linjes ekvation i $\mathbb{R}^2$. Vektorprodukten av två riktningsvektorer ger en normalvektor.

Exempel. Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (2,3,0)$ och $P_3 = (4,1,-5)$.
Lösning. Två riktningsvektorer är $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$. För att förenkla beräkningen ersätter vi den andra med $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. En normalvektor är $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ekvationen blir $-4x + y - 2z = -5$, där högerledet bestämdes genom att sätta in P_1.

Avstånd mellan en punkt och en linje. Avståndet från P till linjen l mäts mellan P och punkten R på l så att $\overrightarrow{PR}$ är vinkelrät mot l.

Exempel. Bestäm avståndet från punkten $P\colon (2,1)$ till linjen $l\colon x + 3y = -15$.
Lösning. Normalen till l genom P har som riktningsvektor linjens normalvektor $\binom{1}{3}$ och skrivs på parameterform som $\binom{x}{y} = \binom{2}{1} + t\binom{1}{3}$. I skärningspunkten av normalen och linjen l är båda ekvationer, $\binom{x}{y} = \binom{2}{1} + t\binom{1}{3}$ och $x + 3y = -15$, uppfyllda, så vi kan sätta in uttrycket för x och y från den första ekvationen i den andra:

$$(2 + t) + 3(1 + 3t) = -15 \ ,$$

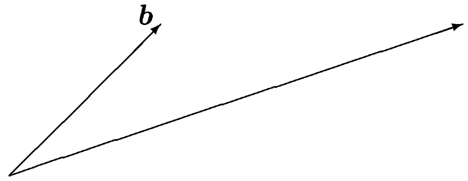
så $10t = -20$, $t = -2$. Skärningspunkten har ortsvektor $\binom{x}{y} = \binom{2}{1} - 2\binom{1}{3} = \binom{0}{-5}$ och avståndet mellan $P\colon (2,1)$ och skärningspunkten $(0,-5)$ är $|2\binom{1}{3}| = 2\sqrt{10}$.

De viktigaste begreppen i detta avsnitt är:

- vektorer, multiplikation med skalärer, vektoraddition, koordinater
- skalärprodukt, vektorprodukt
- räta linjer och plan
- avstånd mellan punkter, linjer och plan
- cirkeln

Övning A

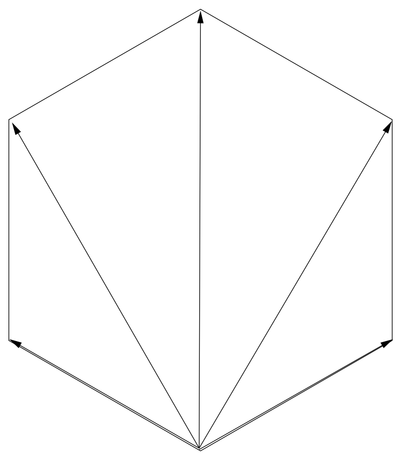
1. Givet två vektorer $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$, rita vektorerna $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ och $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.



2. Förenkla $3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})-4(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

3. Givet två vektorer $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$, rita vektorn $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$. Förenkla också uttrycket och jämför svaren.

4. Låt $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ vara två närliggande kantvektorer i en regelbunden sexhörning. Bestäm diagonalvektorerna $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ och $\boldsymbol{e}$ uttryckta i $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$.



5. Visa att mittpunkten på sträckan AB har ortsvektorn $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

6. Bestäm ortsvektorn för den punkt P som delar sträckan AB i förhållandet $1:2$, resp $2:3$ och allmänt $m:n$.

7. Givet ortsvektorer $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ för punkter A och B. Var ligger punkterna X för vilka $\overrightarrow{OX}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ med $\lambda+\mu=1$, $0\le\lambda\le 1$?

Övning B

1. Låt $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$. Beräka $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_1$ och $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$.

2. Undersök om vektorerna ligger på samma linje:
   a) $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

3. Bestäm talet t så att vektorerna ligger på samma linje:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ t \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 4 \\ t-5 \end{pmatrix}$

4. Bestäm den punkt som ligger mitt emellan punkterna med koordinater $(1, -1, 5)$ och $(2, 2, -3)$.

5. Visa att punkterna $P = (2, 3, 1)$, $Q = (4, 7, -1)$ och $R = (1, 1, 2)$ ligger på en och samma räta linje.

Övning C

1. Beräkna alla skalärprodukter som kan bildas med vektorerna $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Beräkna vektorernas längd.

2. a) Bestäm vinklarna i triangeln i (x, y)-planet med hörn $(1, 3)$, $(4, 9)$ och $(9, -1)$.
   b) Bestäm vinklarna i triangeln i rummet med hörn $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ och $(4, -1, 1)$.

3. Bestäm talet t så att vektorerna blir vinkelräta:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Visa att

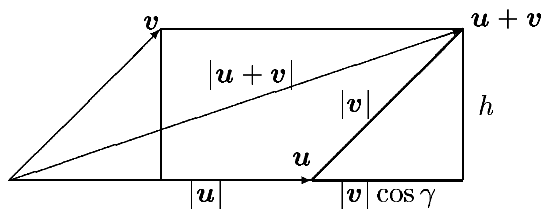
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u}|^2 - |\boldsymbol{v}|^2)$$

genom att använda formeln $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2$ och räknereglerna för skalärprodukten.

5. Visa samma formel

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u}|^2 - |\boldsymbol{v}|^2)$$

geometriskt, med Pythagoras sats. Använd formeln för att visa den algebraiska formeln för skalärprodukten: $\binom{x_1}{y_1} \cdot \binom{x_2}{y_2} = x_1x_2 + y_1y_2$.



6. Visa cosinusregeln: i varje triangel $\triangle ABC$ gäller $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

7. Låt OAB vara en triangel och sätt $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$. Visa att en punkt P ligger på bisektrisen till vinkeln AOB om och endast om det finns en skalär λ så att

$$\overrightarrow{OP} = \lambda\left(\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} + \frac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}\right) .$$

Visa att bisektrisen skär sidan AB i punkten C, där

$$\overrightarrow{OC} = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{a} + \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}\,.$$

8. Betrakta triangel $\triangle ABC$. Visa att en punkt P ligger på höjden genom C om och endast om $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB}$. Använd detta för att visa att de tre höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.

Övning D

1. Beräkna vektorprodukterna
   a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Beräkna arean av den parallellogram som spänns upp av vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. Beräkna arean av triangeln med hörnpunkterna i $(-2, 4, 1)$, $(1, 3, 7)$ och $(2, -3, 0)$.

4. Låt $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm alla enhetsvektorer som är ortogonala mot både $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

Övning E

1. Avgör vilka av punkterna $(7, 0)$, $(6, 1)$, $(12, -11)$ och $(0, 5)$ ligger på linjen
$$\begin{cases} x = 7 - t \\ y = -1 + 2t\,. \end{cases}$$

2. Linjen l har ekvation i parameterform $x = 2 + t$, $y = 5 - t$. Avgör vilken av följande ekvationerna som är en annan parameterframställning av samma linje.
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = 6 - t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 15 - 17t \\ y = -8 + 17t \end{cases}$$

3. Rita linjerna $x - 2y = -1$, $x - 2y = 0$, $x - 2y = 2$ och $x - 2y = 5$ i samma figur.

4. Bestäm den linje genom punkten $(2, 7)$, som är parallell med linjen $3x - y = 5$. Bestäm linjen genom samma punkt $(2, 7)$ som är vinkelrät mot linjen $3x - y = 5$.

5. Beskriv i parameterform och parameterfri linjen genom
   a) $(2, 1)$ och $(3, 3)$, b) $(5, 1)$ och $(0, 2)$, c) $(-3, -1)$ och $(3, 1)$.

6. Bestäm planet genom de tre punkterna $(1, 1, 3)$, $(0, 0, 4)$ och $(-10, 5, 1)$.

7. Beskriv på parameterform skärningslinjen mellan planen $x + 4y - 3z = 2$ och $3x - y + 2z = 3$.

Övning F

1. Bestäm avståndet från punkten $(1, 1)$ till linjen $2x - 3y = 2$.

2. Bestäm avståndet från punkten $(1, -1, 0)$ till planet $2x - 3y + z = 1$.

3. Bestäm avståndet från punkten P: $(1, 0, 1)$ till linjen l genom punkterna Q_1: $(2, 1, 0)$ och Q_2: $(4, 1, 4)$. Närmaste punkten R på l ligger i planet genom P, som är vinkelrät mot l.
   a) Skriv ekvationen för l i parameterform.
   b) Bestäm ekvationen för det plan π genom P som är vinkelrät mot l.
   c) Hitta R genom att beräkna skärningen mellan l och π.
   d) Beräkna avståndet mellan P och R.

4. Bestäm avståndet från punkten $(-1, -1, -1)$ till linjen genom punkterna $(-2, -3, 0)$ och $(-4, -1, 5)$.

5. Bestäm avståndet mellan linjerna

$$l_1 = \begin{cases} x &= -1 - 2t \\ y &= -3 + t \\ z &= t \end{cases} \qquad \text{och} \quad l_2 = \begin{cases} x &= 4 + s \\ y &= 2 - s \\ z &= 3 + s \end{cases}$$

   Ledning: låt Q_1 vara en godtycklig punkt på l_1, Q_2 en godtycklig punkt på l_2. Bestäm $\overrightarrow{Q_1Q_2}$. Beräkna för vilka Q_1, Q_2 vektorn $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ är vinkelrät mot l_1 och l_2. Beräkna för dessa Q_1 och Q_2 vektorns längd.

Övning G

Cirkeln med radie r och medelpunkt $M = (a, b)$ består av alla punkter $P = (x, y)$ som har avstånd r till M, d v s $|\overrightarrow{PM}| = r$. Ekvationen för cirkeln blir då

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \ .$$

1. Bestäm ekvationen för cirkeln med medelpunkt $(3, -2)$ och radie 5.

2. Bestäm den geometriska betydelsen av ekvationen $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 6$.
   Ledning: kvadratkomplettera.