LMA110, Diskret matematik
Gruppövning 4, Streck i räkningen

I Vretblad-Ekstig \$ 5.2-4, behandlas några olika sätt att välja k element från n element. På hur många olika sätt som detta kan ske sammanfattas i följande tabell.

Tabell 2.

Val av k st. från n st.	Med hänsyn till ordning	Utan hänsyn till ordning
Med återläggning	a) n^k	b) $\binom{k+n-1}{k}$
Utan återläggning	c) $\dfrac{n!}{(n-k)!}$	d) $\binom{n}{k}$

Du bör själv kunna bevisa a), c) och d). Övning: Gör det!

Fallet b) tas inte upp i Vretblad-Ekstig så vi går igenom det här.

Vi börjar med ett exempel.

Antag att Jan och Ulla är sugna på att äta kakor. På kakfatet ligger fyra likadana kakor. På hur många sätt kan de fördela kakorna mellan sig?

Ja, de olika sätten är,

1) Jan får 0 och Ulla 4 kakor
2) Jan får 1 och Ulla 3 kakor
3) Jan får 2 och Ulla 2 kakor
4) Jan får 3 och Ulla 1 kakor
5) Jan får 4 och Ulla 0 kakor,

och alltså kan kakorna fördelas 5 sätt

Låt oss beräkna det här på ett annat sätt. Vi lägger ut kakorna på rad och delar dom i två delar med en pinne som i figuren nedan.

$$\heartsuit\ \heartsuit\ \heartsuit\ \Big|\ \heartsuit$$

Jan får kakorna som ligger till vänster om pinnen och Ulla dom som ligger till höger om pinnen. Så om pinnen hamnar som i figuren får Jan tre och Ulla en kaka. Det svarar alltså mot rad 4) i tabellen. Omvänt svarar t.ex. rad 2) i tabellen mot konfigurationen

$$\heartsuit \;\Big|\; \heartsuit \;\heartsuit \;\heartsuit$$

Så antalet sätt att fördela kakorna är detsamma som antalet utläggningar av fyra $\heartsuit$ och en $\Big|$ på fem platser. Antalet sådana utläggningar är lika många som antalet sätt att välja fyra platser (för $\heartsuit$) av fem, eller att välja en plats (för $\Big|$) av fem, dvs. $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ sätt.

Om vi generaliserar problemet till många kakor och många personer att fördela kakorna mellan blir den första metoden arbetssam men den andra med att sätta sträck i räkningen fungerar lika bra.

Bevis i det allmänna fallet.

Vi antar att vi har n kulor med olika färg i en urna. Vi skall dra k kulor med återläggning ur urnan. Utfallet bestämms av hur många gånger, k_i, som kulan med färgen nummer i väljs. Så det gäller att bestämma antalet olika ickenegativa heltalslösningar till ekvationen

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k. \tag{1}$$

Betrakta följande konfiguration (i figuren är $k = 3$ och $n = 5$)

$$1 \Big| \Big| 1 \Big| 1 \Big| \tag{2}$$

Den består av $n-1$ streck och k ettor. Strecken delar in ettorna i n stycken grupper och genom att låta n_i vara antalet ettor som finns i grupp nummer i, ser vi att varje sådan konfiguration svarar entydigt mot en lösning till (1). (I figuren har vi $k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = k_4 = 1$ och $k_5 = 0$.) Så antalet lösningar till (1) är detsamma som antalet konfigurationer av typ (2). Men en sådan konfiguration bestämms av var bland de $k + n - 1$ platserna som vi skall placera de k ettorna (eller de $n - 1$ strecken). Detta kan göras på $\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$ sätt.

$\square$

Det viktiga är inte att du lär dig formeln $\binom{k+n-1}{k}$. Formler glömmer man lätt. Det viktiga är att komma ihåg metoden att ”sätta streck i räkningen”

Övning 1. Hur många olika lösningar har ekvationen

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 17$$

där alla n_i är naturliga tal?

Övning 2. Du skall köpa tio flaskor lättöl i en affär som har tre olika sorter. På hur många sätt kan du göra det?

Övning 3. På hur många sätt kan sju likadana bollar läggas i tre olika lådor
(a) Utan inskränkningar?
(b) När ingen låda får vara tom?
(c) När den första lådan skall innehålla ett jämnt antal bollar?

Övning 4. Vad bli resultatet i förra övningen om bollarna är olika?

Övning 5. En dominobrickas framsida är delad i två kvadrater som var och en består av ingen, en, ... eller sex prickar. Hur många dominobrickor finns det?

Övning 6. Hur många termer får man då man utvecklar $(x_1 + x_2 + \ldots + x_5)^n$?

Övning 7. Hur många ickenegativa heltalslösningar finns det till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$?
Hur många (strikt) positiva?
Hur många med $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 0$?

Övning 8. Vretblad-Ekstig 5.60

Övning 9. Vretblad-Ekstig 5.62

Övning 10. Vretblad-Ekstig 5.63

Förslag till svar:

1. 1140
2. 66
3. (a) 36 (b) 15 (c) 20
4. (a) 2187 (b) 1806 (c) 1094
5. 28
6. $\binom{n+4}{4}$
7. (a) 455 (b) 165 (c) 35