LMA110, Diskret matematik
Gruppövning 5

Dirichlets lådprincip

Gå igenom avsnitt 5.1 i Vretblad-Ekstig. Vänta med Exempel 5.6 tills ni har gått igenom moduloräkning i algebradelen.

Här är annat exempel på lådprincipen:

Antag att vi har valt åtta tal från talen $1, 2, 3, \ldots, 13$. Visa att då finns alltid två tal vars summa är 14.

Om talen t.ex. var $1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 13$ så är $1 + 13 = 2 + 12 = 14$ så då finns det två sådana par.

Lösning. Betrakta "lådorna" $L_1 = \{1, 13\}$, $L_2 = \{2, 12\}$, $L_3 = \{3, 11\}$, $L_4 = \{4, 10\}$, $L_5 = \{5, 9\}$, $L_6 = \{6, 8\}$ och $L_7 = \{7\}$. Dom är 7 stycken. Vi "stoppar nu ner" våra 8 valda tal i dessa lådor. Då måste det hamna minst två tal i någon (eller några) av lådorna. Det kan inte vara L_7 eftersom den bara innehåller ett tal. Det måste alltså hamna två tal i någon av de andra lådorna. Men när två tal ligger i samma låda är deras summa 14.

Övning. Visa att det går att välja sju tal så att inget par av dessa tal har summan 14.

$\square$

1. Vretblad-Ekstig 5.1

2. Vretblad-Ekstig 5.2

3. Vretblad-Ekstig 5.3

4. En slarvig student har kastat ner 12 par osorterade sockor med olika mönster i en byrålåda. Hur många sockor måste hon plocka upp ur lådan för att vara säker på att få två sockar med samma mönster.

5. En blindbock plockar sockar ur en byrålåda som innehåller 12 svarta och 12 blå sockar. Hur många sockar måste han minst ta för att säkert få
   (a) ett enfärgat par?
   (b) ett svart och ett blått par?
6. Antag att det i Övning 5 dessutom låg 12 röda sockar i lådan. Hur många sockar måste han nu minst tag för att säkert få
   (a) ett enfärgat par?
   (b) ett par av varje färg?
7. Visa att om tio tal väljs på måfå från talen $1, 2, 3, \ldots, 16, 17$ så finns det alltid två av dessa tio tal som har summan 18.
8. Visa att i varje mängd med 17 positiva heltal finns det alltid två tal som har samma rest vid division med 16.
9. Visa att bland 40 personer finns det alltid minst fyra personer som har födelsedag i samma månad.
10. Visa att om 5 punkter placeras i en liksidig triangel med sidan 6 cm, så finns det två punkter vars avstånd är högst 3 cm.
11. Visa att om 10 punkter placeras i en liksidig triangel med sidan 6 cm, så finns det två punkter vars avstånd är högst 2 cm.
12. I början av en fest går man omkring och skakar hand med varandra. Visa att det alltid finns två personer som har utdelat lika många handskakningar.
13. En skolklass har tre föreningar. För varje par av elever i klassen finns det en förening som de båda tillhör. Visa att det finns en förening som minst 2/3 av klassen tillhör.
14. Visa att under någon av årets månader har minst 3 av studenterna i LMA110-kursen födelsedag. Hur är det med minst 4? Med minst 5?
15. (a) Studera exempel 5.5 s. 116 i Vretblad-Ekstig för en något mera sofistikerad tillämpning på lådprincipen.
    (b) Visa att i varje mängd med sju heltal finns två tal vars summa eller skillnad är delbar med 10.

16. 6 punkter är givna. Varje par av punkter förbinds med ett rött eller blått streck.

    (a) Visa att man alltid får minst en enfärgad triangel.
    (En mer slående formulering: I varje grupp på sex personer finns det en grupp på tre personer som alla antingen älskar eller hatar varandra.)

    (b) Visa att man inte behöver få det om man bara har 5 punkter.

Ledning

15(b): Studera resterna vid division med 10.
Lådorna är mängderna $\{0\}$, $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$ och $\{5\}$.

16(a): Fixera en punkt A. Från A går det antingen minst tre röda eller tre blå streck (Varför?). Säg att det var minst tre röda streck som gick till B, C och D. Vad händer om det går/inte går något rött streck mellan B, C och D?

Förslag till svar:

4. 13

5. (a) 3 (b) 14

6. (a) 4 (b) 26