LMA110, Diskret matematik
Gruppövning 7

Inklusion-exklusion

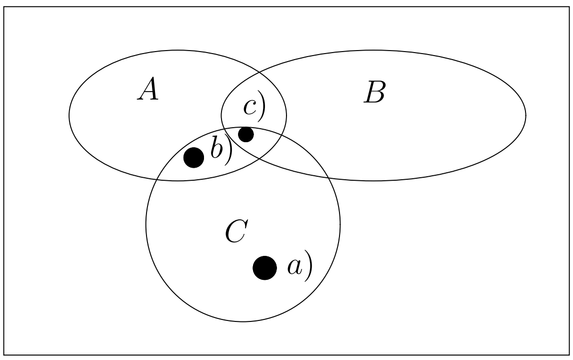
Övningar

1. Vretblad-Ekstig 1.62
2. I en grupp av studenter äger 73 en dator 125 en stereo och 41 har båda delarna. Hur många har minst en dator eller en stereo?
3. Vretblad-Ekstig 1.68
4. Vretblad-Ekstig 1.69

Svaret på Övning 4 är

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C$$
$$-\Big(\#(A \cap B) + \#(A \cap C) + \#(B \cap C)\Big) + \#(A \cap B \cap C).$$

För att visa att denna formel stämmer kan man resonera på följande sätt. Det gäller att visa att varje element i $A \cup B \cup C$ kommer att räknas precis en gång. Det finns tre typer av element, sådana som
a) ligger i exakt en av mängderna,
b) ligger i exakt två av mängderna,
och
c) ligger i alla tre mängderna.



För ett element av typ a) gäller att det räknas en gång i $\#A+\#B+\#C$, men ingen gång i $\#(A\cap B)+\#(A\cap C)+\#(B\cap C)$ och $\#(A\cap B\cap C)$. Så totalt räknas elementet $1-0+0=1$ gång.

För ett element av typ b) gäller att det räknas två gånger i $\#A+\#B+\#C$, en gång i $\#(A\cap B)+\#(A\cap C)+\#(B\cap C)$ men ingen gång i $\#(A\cap B\cap C)$. Så totalt räknas elementet $2-1+0=1$ gång.

För ett element av typ c) gäller att det räknas tre gånger i $\#A+\#B+\#C$, tre gånger i $\#(A\cap B)+\#(A\cap C)+\#(B\cap C)$ och en gång i $\#(A\cap B\cap C)$. Så totalt räknas elementet $3-3+1=1$ gång.

□

Vi skall generalisera denna formel till ett godtyckligt antal mängder. Låt $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vara n ändliga mängder och låt S_k, $1\le k\le n$, vara summan av alla k-snitt, dvs. summan av antalet element i alla mängder som kan bildas som skärningen av k stycken av mängderna $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Så

$$
\begin{aligned}
&S_1 = \#A_1 + \#A_2 + \ldots + \#A_n,\\
&S_2 = \#(A_1\cap A_2) + \#(A_1\cap A_3) + \ldots + \#(A_{n-1}\cap A_n),\\
&\vdots\\
&S_n = \#(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n).
\end{aligned}
$$

Övning 5. Hur många termer är det i S_k?

Nu gäller följande sats.

Sats 1 $\#(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{n+1}S_n$.

Bevis. Detta bevisas på liknande sätt som för tre mängder. Gå gärna först igenom fallet $n=3$ i beviset nedan och jämför med beviset för tre mängder.

Låt x vara ett element som ligger i exakt m, $1\le m\le n$, av mängderna $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Då gäller att om $k\le m$ så kommer x att räknas i $\binom{m}{k}$ av termerna i S_k. (Varför då? Jämför Övning 5.) Om $k>m$ räknas x inte alls i S_k. Så totalt kommer x att räknas

$$a_x = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \ldots + (-1)^{m+1}\binom{m}{m}$$

gånger i $S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{n+1}S_n$. Enligt binomialsatsen gäller att

$$
\begin{aligned}
0 = (1-1)^m &= \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \ldots + (-1)^m\binom{m}{m}\\
&= \binom{m}{0} - \left\{\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \ldots + (-1)^{m+1}\binom{m}{m}\right\} = 1 - a_x
\end{aligned}
$$

vilket ger $a_x = 1$. □

Övningar (forts)

6. Hur många permutationer av siffrorna $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ börjar med en nia eller slutar med en tvåa (eller både och)?

7. (a) Hur många heltal mellan 1 och 1000 är inte delbara med 7? Med 11? Med 13?

   (b) Hur många heltal mellan 1 och 1000 är relativt prima med 77?

   (c) Hur många heltal mellan 1 och 1000 är relativt prima med 1001?

8. Hur många heltalslösningar till ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$$

   uppfyller $0 \leq x_i \leq 7$ för alla i?

9. (a) Hur många följder $x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5$ där varje x_i är antingen 0, 1 eller 2 finns det?

   (b) Hur många av dessa innehåller inte någon nolla?

   (c) Hur många av dessa innehåller minst en nolla, en etta och en tvåa?

Förslag till svar:

2. 157

5. $\binom{n}{k}$

6. 75600

7. (a) 858, 910 resp. 924 (b) 780 (c) 720

8. 284

9. (a) 243 (b) 32 (c) 150