Exempel på tentamensuppgifter i LMA110, Diskret matematik

1. Givet är de 7 bokstäverna i ordet APPARAT. Hur många olika ”ord” (= bokstavspermutationer) kan man bilda av dem med
   (a) 7 bokstäver
   (b) 5 bokstäver?

2. Hur många femsiffriga tal har ett udda antal 1:or?

3. Hur många positiva heltalslösningar har ekvationen
$$x + y + z = 91,$$
där $x \geq 10$ och $y \geq 13$?

4. Poker spelas med en vanlig kortlek som har 52 kort: 13 valörer i 4 färger. En pokerhand har 5 kort. Hur många pokerhänder
   (a) finns det?
   (b) innehåller inte två kort av samma valör?
   (c) innehåller exakt två kort av samma valör?

   Anm. Två kort av samma valör brukar kallas för ett par.

5. Femton personer ska rösta på tre kandidater. Varje person har en röst och det är inte tillåtet att lägga ner sin röst. På hur många sätt kan det inträffa att alla kandidater får lika många röster ?

6. Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24, \text{ där } 0 \leq x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \leq 7.$$

7. Hur många n-siffriga tal med siffrorna 1, 2, 3 och 4 har ett jämnt antal 1:or och ett udda antal 2:or?

8. (a) Visa att funktionen $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definierad av $f(m, n) = 2^m 3^n$ är injektiv.
   (b) Definiera en injektiv avbildning från $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ till $\mathbb{N}$.

9. Man har två stycken A:n, B:n, C:n och D:n. Hur många olika “meningar” med tre “ord” kan bildas med (alla) dessa bokstäver? (Ett “ord” är en sekvens av bokstäver med minst en bokstav. En “mening” är en sekvens av ord.)

10. (a) Visa att $k^2 = \binom{k}{1} + 2\binom{k}{2}$ för varje naturligt tal k.

    (b) Använd uppgift (a) och identiteten $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}$ för att beräkna
    $$\sum_{k=0}^{n} (1 + 3k + 3k^2) \quad \text{då } n = 100^{100} - 1.$$

11. Visa, dels algebraiskt och dels kombinatoriskt, att
$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

12. Hur många av heltalen 1, 2, 3, ..., 100 är varken delbara med 2, 3 eller 5?

13. På hur många sätt kan 10 äpplen och 13 apelsiner delas bland 6 barn, om varje barn skall få minst ett äpple och minst en apelsin?

14. På hur många sätt kan man skriva
$$k_1 + k_2 + k_3 = 14$$
då k_i är heltal med $0 \le k_1 \le 4$, $4 \le k_2 \le 7$ och $3 \le k_3 \le 5$?

15. (a) En dominobricka består av två kvadratiska fält. I varje fält finns det mellan noll och sex prickar. Exempel på dominobrickor är 🀵 och 🁙. Hur många dominobrickor finns det? Tänk på att, till exempel, 🀼 är samma bricka som 🁎.

    (b) Hur många sätt finns det att lägga två dominobrickor i rad så att angränsande fält har lika många prickar? Två rader anses vara identiska om den ena fås från den andra genom att lägga brickorna i omvänd ordning. Till exempel anses raderna 🁒🁕 och 🀽🁘 vara identiska. Med andra ord vill vi räkna de rader $\boxed{u|x}\boxed{x|v}$ där u, x och v tillhör $\{0, 1, \ldots, 6\}$ och $u < v$.

16. Du har en aldrig sinande tillgång till tegelstenar av följande fyra olika typer:

typ av sten	□	■	▭	▬
storlek	1×1	1×1	1×2	1×2

    (a) Hur många sätt a_n finns det att *tegla* (övertäcka) en $1 \times n$ rektangel med stenar av typ □ och ■? Till exempel finns det 8 sådana teglingar av en 1×3 rektangel, nämligen □□□, □□■, □■□, □■■, ■□□, ■□■, ■■□, ■■■; så $a_3 = 8$.

(b) Låt b_n vara antalet sätt att tegla en $1 \times n$ rektangel med stenar av typ □ och ▬. Till exempel finns det 3 sådana teglingar av en 1×3 rektangel, nämligen □□□, □▬ och ▬□; så $b_3 = 3$. Visa att $b_n = F_{n+1}$, där F_n är det $n$te Fibonaccitalet.

(c) Hur många sätt c_n finns det att tegla en $1 \times n$ rektangel med stenar av typ □, ▭ och ▬? Till exempel finns det 5 sådana teglingar av en 1×3 rektangel, nämligen □□□, □▭, ▭□, □▬ och ▬□; så $c_3 = 5$.

(d) Visa att $b_n \leq a_n$ och $b_n \leq c_n$ för varje $n \geq 1$. (Det är inte nödvändigt att ha löst (a), (b) eller (c) för att visa detta.)

17. Hur många av de ickenegativa heltalslösningarna till

$$x + y + z = 12$$

uppfyller $x \leq 3$, $y \leq 11$ och $z \leq 11$?

18. Hur många ”ord” med tio bokstäver kan bildas av bokstäverna a,b och c utan att två a:n kommer efter varandra?

19. Det $n$te *Lucastalet* L_n definieras av $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ och

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad \text{för } n \geq 1.$$

(a) Finn en formel för L_n genom att lösa denna differensekvation.

(b) Visa att $L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$ för $n \geq 1$, där F_n är det $n$te Fibonaccitalet.

(c) Visa att $F_{n+1} = (L_n + L_{n+2})/5$ för $n \geq 1$.

20. Kajsa och Kalle tänker flytta ihop och finner att de behöver en bokhylla. De beger sig till ett möbelvaruhus som säljer en bokhylleserie med fyra olika typer av sektioner i tre olika färger. Dessa kan placeras vid sidan av eller ovan på varandra.

Kajsas och Kalles pengar räcker till nio sektioner. De vill att alla sektionerna ska vara olika. Hur många olika bokhyllor (som hänger ihop) har de att välja mellan?

21. Två cirkelskivor delas in i sextio lika stora sektorer. I båda skivorna färgas tjugo sektorer vita, tjugo röda och tjugo blå (på godtyckligt sätt). Visa att hur detta än görs så kan skivorna läggas ovanpå varandra (de får roteras men inte vändas) så att minst tjugo sektorer har samma färg på båda skivorna. Är tjugo bäst möjligt?

Förslag till svar

1. (a) $7!/2!3! = 420$, (b) 250
2. 30644
3. $\binom{70}{2} = 2415$
4. (a) $\binom{52}{5}$, (b) $\binom{13}{5}4^5$, (c) $\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}4^3$
5. $15!/(5!)^3 = 756756$
6. $\binom{28}{4} - \binom{5}{1}\binom{20}{4} + \binom{5}{2}\binom{12}{4} - \binom{5}{3}$
7. 4^{n-1}

9. $8!/2^4 \cdot \binom{7}{2}$
10. 100^{300}

12. 26
13. $\binom{9}{5}\binom{12}{5} = 99792$
14. 6
15. (a)28, (b) $7\binom{7}{2} = 147$
16. (a) 2^n, (c) $\frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$
17. 44
18. 6688
19. (a) $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
20. $2^8 \cdot 12^9$