1. Bestäm matrisen för speglingen av planet $\mathbb{R}^2$ i linjen $3x - y = 0$.

2. Lös för alla värden på parametern a ekvationssystemet:

$$\begin{array}{rrrl} 2ax_1 & +ax_2 & +ax_3 & = 1 \\ (3a+1)x_1 & +(a+1)x_2 & +2ax_3 & = 1 \\ 2ax_1 & +ax_2 & +x_3 & = 1 \end{array}$$

3. Lös matrisekvationen $AXB + 2AX = C$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Förslag: Beräkna inversen A^{-1} till matrisen A och utnyttja den för att lösa ekvationen.)

4. Lös ekvationen:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

5. (a) Vad menas med att en uppsättning av vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende (linjärt oberoende)? Ge också lämpliga exempel som förklarar definitionerna.

   (b) Visa att kolonnerna i en $(n \times n)-$matris A är linjärt beroende då och endast då determinanten av matrisen $\det A = 0$.

6. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Finns det en bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till denna matris? Motivera noga Ditt svar!

7. Ge exempel på:

   (a) En (4×4)-ortogonalmatris (ON-matris) $A = (a_{ij})$ med alla element $a_{ij} \neq 0$,

   (b) En linjär avbildning $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ($A \neq \pm$ identitet) som bevarar längder av alla vektorer dvs $|A\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ för varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$.

   Motivera noga Dina svar!

8. (a) Låt A och B vara två kvadratiska matriser av samma storlek. Visa att ”konjugatregeln” $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ gäller då och endast då matriserna A och B kommuterar dvs $AB = BA$.

   (b) Låt B vara en matris sådan att $B^2 = 0$. Visa att matrisen $I + B$ har invers.

Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 12p. För väl godkänd krävs minst 20p. Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 18 november.